উচ্চ মাধ্যমিক

ত্রিকোণমিতি

ডক্টর জ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্তী
ডক্টর প্রভাতরঞ্জন ঘোষ

ত্রিকোণমিতি

[উচ্চ-মাধ্যমিক শ্রেণীর জন্য]

শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্ত্তী, এম. এস্. সি., ডি. ফিল.
(স্যার আশুতোষ মুখোপাধ্যায় স্বর্ণ-পদক ও গ্রিফিথ পুরস্কার প্রাপ্ত)
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ফলিত গণিতের রীডার,
বঙ্গবাসী কলেজের ভূতপূর্ব অধ্যাপক।

এবং

শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ, এম. এস্. সি., ডি. ফিল.
কলিকাতা বিদ্যাসাগর সান্ধ্য কলেজের গণিত বিভাগের প্রধান
ও কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজের অধ্যাপক।

মৌলিক লাইব্রেরী
১৮-বি, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
শ্রীদীপ্তেন্দ্রনাথ মৌলিক,
মৌলিক লাইব্রেরী
১৮-বি, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম সংস্করণ—অক্টোবর, ১৯৭৬
দ্বিতীয় সংস্করণ—সেপ্টেম্বর, ১৯৭৭

মূল্য : নয় টাকা মাত্র

মুদ্রাকর :
লীলা ঘোষ
তাপসী প্রিণ্টার্স
৬ শিবু বিশ্বাস লেন
কলিকাতা-৭০০০০৬

ভূমিকা

শিক্ষার পুনর্গঠিত ছক অনুযায়ী উচ্চতর মধ্যশিক্ষা-পর্ষদ-রচিত পাঠ্যক্রম অনুসারে **ত্রিকোণমিতি** পুস্তকখানি রচিত হইল। শিক্ষায় শ্রেণী বিভাগ নির্দিষ্ট লক্ষ্যে পৌছাইবার সোপান। ইহার বিভিন্ন স্তরের সহিত নিবিড় সম্পর্ক না থাকিলে শিক্ষাদান ফলপ্রসূ হয় না। বহুদিনের অধ্যয়ন ও অধ্যাপনায় অর্জিত অভিজ্ঞতা শিক্ষার্থীমনের চাহিদার প্রতি সজাগ লক্ষ্য রাখিতে সাহায্য করিয়াছে। পুস্তকখানিতে প্রভূত পরিমাণ উদাহরণ ও প্রশ্নমালার সংযোজন শিক্ষার্থীগণের আগ্রহ ও ঔৎসুক্য বৃদ্ধিতে সহায়তা করিবে। পরিশেষে যুক্ত পাঁচ অঙ্কের লগ-তালিকা এবং অন্যান্য তালিকা শিক্ষার্থীগণের বিশেষ উপকারে লাগিবে।

যথাযথ মনোনিবেশ সত্ত্বেও সময়ের স্বল্পতার জন্য মুদ্রণ প্রমাদ বা অন্যান্য ত্রুটি অবশ্যই ঘটিয়া থাকিতে পারে। পুস্তকের উৎকর্ষ সাধনে ত্রুটি সংশোধনের যে-কোন প্রস্তাব সমাদরে গৃহীত হইবে।

পরিশেষে পুস্তক প্রকাশনায় সুপ্রতিষ্ঠিত প্রকাশক সংস্থা মৌলিক লাইব্রেরীর সুযোগ্য পরিচালক শ্রীযুক্ত দীপ্তেন্দ্রনাথ মৌলিক মহাশয়কে তাঁহার ধৈর্য ও নিষ্ঠার জন্য এবং তাপসী প্রিণ্টার্সের মালিক ও কর্মচারীবৃন্দকে তাঁহাদের অক্লান্ত পরিশ্রমের জন্য কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করি।

বিজ্ঞান কলেজ,
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়,
১৫ই অক্টোবর, ১৯৭৬

ইতি
শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্ত্তী
শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

অতি অল্প পরিসর সময়ে আমাদের রচিত ত্রিকোণমিতি পুস্তকখানির মুদ্রিত সংখ্যাগুলি সম্পূর্ণ নিঃশেষিত হওয়ায় ইহার উৎকর্ষতা শিক্ষক ও ছাত্রমহলে গ্রাহ্য হইয়াছে বলিয়া আমরা ধরিয়া লইতেছি এবং আমাদের শ্রম সার্থক হইয়াছে—মনে করিতেছি। দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা রচনাকালে সকলের নিকট আমাদের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাইতেছি।

দ্বিতীয় সংস্করণে স্থানে স্থানে বিষয়বস্তুর আলোচনার উৎকর্ষতা সাধিত হইয়াছে এবং যৌগিক কোণের নূতন ও সহজ প্রমাণ সংযোজন করা হইয়াছে। পুস্তকের উৎকর্ষতা সাধনে পরম শ্রদ্ধেয় অধ্যাপক পরিমল কান্তি ঘোষ মহাশয়ের নিকট প্রাপ্ত উপদেশ আমাদের প্রভূত সহায়তা করিয়াছে। তাঁহাকে আমাদের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাইতেছি।

ইতি

বিজ্ঞান কলেজ
সেপ্টেম্বর, ১৯৭৭

শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্ত্তী
শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ

SYLLABUS

Mathematics paper I—100 marks :

Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Trigonometry :—30 marks

Measure of an angle—Degrees, Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles. Complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles. Problems relating to heights and distances.

সংক্ষিপ্ত পদের অর্থ

W. B. B. H. S.—West Bengal Board এর Higher Secondary পরীক্ষা

C. P. U.—Calcutta University এর Pre-University পরীক্ষা

B. U. Ent.—Burdwan University এর Entrance পরীক্ষা ।

সূচীপত্র

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

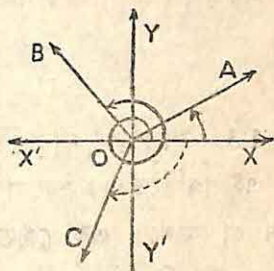
ত্রিকোণমিতিক কোণসমূহ

(Trigonometrical angles)

1·1. জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ ঃ

ত্রিভুজের তিনটি কোণ থাকায় উহাকে ত্রিকোণও বলা যায়। সুতরাং 'ত্রিকোণমিতি' নাম হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে ত্রিভুজ-সম্পর্কীয় পরিমাপনের পদ্ধতিই ইহার বিষয়বস্তু। ইহা জ্যামিতির একটি বিশিষ্ট শাখা। ইহার আলোচ্য বিষয় অধিকতর ব্যাপক।

দুইটি রশ্মিরেখা পরস্পর মিলিত হইয়া একটি কোণ উৎপন্ন করে। ইহাকেই **জ্যামিতিক কোণ** বলে। ইহার মান 0° হইতে 360°-এর মধ্যে থাকে। জ্যামিতিতে কোণ সর্বদাই ধনাত্মক, কখনও ঋণাত্মক হয় না। তবে কোণের মান হিসাবে কোণকে তিন ভাগে ভাগ করা হয় ; সূক্ষ্ম (acute) কোণ, স্থূল (obtuse) কোণ এবং প্রবৃদ্ধ (reflex) কোণ।

ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা জ্যামিতিক কোণ অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক। একটি রশ্মিরেখার আবর্তনের ফলে একটি **ত্রিকোণমিতিক** কোণের উৎপত্তি হয়। একটি রশ্মিরেখা ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে (anti-clockwise) ঘুরিয়া XOA সূক্ষ্মকোণটি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণটি ধনাত্মক (positive), অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী আবর্তনের ফলে যে-কোণের উৎপত্তি হয় তাহা ধনাত্মক।

রশ্মিরেখাটি ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরিয়া একটি আবর্তন সম্পূর্ণ করিবার পর পুনরায় একইক্রমে ঘুরিয়া OB অবস্থানে আসিলে যে-কোণটির উৎপত্তি হয় তাহা পাঁচ সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

রশ্মিরেখাটি ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে (clock-wise) ঘুরিয়া XOC কোণটি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণটি ঋণাত্মক (negative), অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে আবর্তনের ফলে যে-কোণের উৎপত্তি হয় তাহা ঋণাত্মক।

ত্রিকোণমিতিক কোণ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন প্রকারের হইতে পারে ইহার মান সর্বদা 0° হইতে 360°-এর মধ্যে থাকে না।

ত্রিকোণমিতিতে কোণের পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য তিনটি পদ্ধতি (system) অনুসৃত হয়। পদ্ধতি তিনটি হইল (i) ষষ্টিক (sexagesimal), (ii) শতক (centesimal) এবং (iii) বৃত্তীয় (circular) পদ্ধতি।

1·2. ষষ্টিক পদ্ধতি ঃ

একটি রেখাংশ অন্য একটি রেখাংশের উপর দণ্ডায়মান হইলে সন্নিহিত কোণদ্বয় যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে, প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ হয়। ইহা একটি ধ্রুবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 90 সমান ভাগে ভাগ করা হয় এবং প্রত্যেক ভাগ বা অংশকে এক ডিগ্রী (degree, 1°) বলা হয়। এক ডিগ্রীকে 60 সমান ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক (ষষ্টিক) **মিনিট** (minute, 1′) বলা হয়। এক মিনিটকে পুনরায় 60 সমান ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক (ষষ্টিক) **সেকেণ্ড** (second, 1″) বলা হয়। এই পদ্ধতিতে ডিগ্রীকে ও মিনিটকে ষষ্টিতম অংশে ভাগ করা হয়। সেইজন্য এই পদ্ধতির নাম ষষ্টিক পদ্ধতি।

অতএব, 1 সমকোণ $= 90^\circ$,

$1^\circ = 60'$,

$1' = 60''$.

1·3 শতক পদ্ধতি ঃ

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 100 সমান ভাগে ভাগ করা হয় এবং প্রত্যেক ভাগ বা অংশকে এক **গ্রেড** (grade, 1^g) বলা হয়। এক গ্রেডকে 100 সমান ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক (শতক) **মিনিট** (1`) বলা হয়। এক মিনিটকে পুনরায় 100 সমান ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক (শতক) **সেকেণ্ড** (1``) বলা হয়। এই পদ্ধতিতে সমকোণকে, গ্রেডকে ও মিনিটকে শততম অংশে ভাগ করা হয়। এইজন্য এই পদ্ধতির নাম শতক পদ্ধতি।

অতএব 1 সমকোণ $= 100^g$,

$1^g = 100^{`}$,

$1^{`} = 100^{``}$.

ষষ্টিক ও শতক এই উভয় পদ্ধতিতেই মিনিট ও সেকেণ্ড আছে, কিন্তু উহাদের প্রতীক চিহ্নগুলি বিভিন্ন।

1 সমকোণ $= 90^\circ = 100^g$.

$$\therefore \quad 1^\circ = \frac{10^g}{9} \text{ এবং } 1^g = \frac{9^\circ}{10}.$$

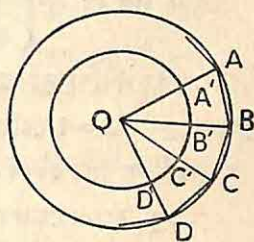
এই সম্পর্ক হইতেই এক পদ্ধতির (ষষ্টিক বা শতক) মানে প্রকাশিত কোণকে অন্য পদ্ধতির (শতক বা ষষ্টিক) মানে প্রকাশ করা যায়।

1·4. বৃত্তীয় পদ্ধতি ঃ

যে-কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দীর্ঘ বৃত্তচাপ উহার কেন্দ্রে যে-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক **রেডিয়ান** (radian 1^c) বলা হয়। বৃত্তীয় পদ্ধতিতে রেডিয়ানই কোণের একক।

উপপাদ্য 1. যে-কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।

(The ratio of the circumference and the diameter of any circle is constant).

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ভিন্ন দুইটি ব্যাসার্ধ R ও r ($R > r$) লইয়া দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। ABCD$\cdots$উহাদের একটির অন্তর্লিখিত n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। OA, OB, OC, OD,$\cdots$ব্যাসার্ধগুলি অপর বৃত্তটিকে যথাক্রমে A′, B′, C′, D′,$\cdots$বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। পর পর যুক্ত করিলে A′B′C′D′...একটি n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হইবে এবং ইহা অপর বৃত্তটির অন্তর্লিখিত হইবে।

এখন $\triangle OAB$ ও $\triangle OA'B'$-এর মধ্যে, $OA = OB$, $OA' = OB'$.

$$\text{সুতরাং } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}.$$

আবার $\angle A'OB' = \angle AOB$.

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হইবে।

$$\therefore \quad \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{r}{R}.$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'C'D'\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}}{ABCD\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{n.A'B'}{n.\ AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{r}{R}$$

$$= \frac{A'B'C'D'\cdots\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{ABCD\cdots\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}.$$

এই সম্পর্কটি n-এর কোন মানের উপর নির্ভর করে না। n-এর মান যত বড় হইবে, বহুভুজদ্বয়ের বাহুর দৈর্ঘ্য তত ছোট হইবে। n-এর সীমাহীন বৃহৎ অবস্থায় বা চরম অবস্থায় (in the limit) বহুভুজের পরিসীমা বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিয়া যাইবে। যেহেতু ব্যাস, ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ ;

অতএব $\dfrac{A'B'C'D'\cdots\text{বৃত্তের পরিধি}}{ABCD\cdots\text{বৃত্তের পরিধি}} = \dfrac{A'B'C'D'\ldots\text{বৃত্তের ব্যাস}}{ABCD\cdots\text{বৃত্তের ব্যাস}}.$

$$\therefore \quad \frac{A'B'C'D'\ldots\text{বৃত্তের পরিধি}}{A'B'C'D'\ldots\text{বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{ABCD\ldots\text{বৃত্তের পরিধি}}{ABCD\ldots\text{বৃত্তের ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক।}$$

টীকা ঃ এই ধ্রুবককে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহা একটি অমেয় সংখ্যা। ইহার আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ বা 3·14159.

$\therefore$ **বৃত্তের পরিধি = π (বৃত্তের ব্যাস).**

উপপাদ্য 2. রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

(A radian is a constant angle)

O কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের PQ চাপের দৈর্ঘ্য OP $(=r)$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। সুতরাং $\angle POQ = 1$ রেডিয়ান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই কোণটি ধ্রুবক কোণ।

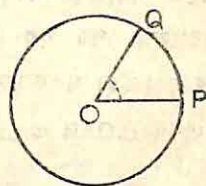
যেহেতু, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ যে-কোন কোণ ইহার উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী,

$$\therefore \quad \frac{\angle POQ}{\text{সমগ্র পরিধির দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ}}$$

$$= \frac{\text{চাপ } PQ}{\text{সমগ্র পরিধি}} = \frac{\text{ব্যাসার্ধ}}{\text{পরিধি}}$$

অর্থাৎ $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{r}{\pi(2r)} = \dfrac{1}{2\pi}.$

সুতরাং, $1 \text{ রেডিয়ান} = \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ = একটি ধ্রুবক কোণ।

($\because$ π একটি ধ্রুবক)

টীকা ঃ উপরোক্ত উপপাদ্য হইতে দেখা যাইতেছে,

$$\pi \text{ রেডিয়ান} = 180^\circ.$$

$$\therefore \quad 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45'' \text{ (প্রায়)}$$

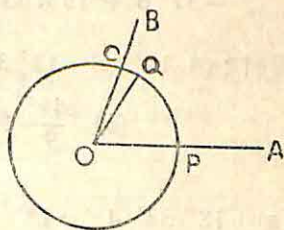
$$\text{এবং } 1 \text{ সমকোণ} = 90^\circ = 100^g = \frac{\pi}{2} \text{ রেডিয়ান।}$$

সুতরাং ডিগ্রীতে, গ্রেডে এবং রেডিয়ানে কোন কোণের মাপ যথাক্রমে x, y এবং z হইলে $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{2z}{\pi}$.

কোণের মান রেডিয়ানে থাকিলে সাধারণতঃ কোন উল্লেখ করা হয় না। উদাহরণস্বরূপ, কোণ $\frac{\pi}{4}$ বলিলে $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান বোঝান হয় অর্থাৎ কোণের এককের কোন উল্লেখ না থাকিলে উহাকে কোণের রেডিয়ান মান বলিয়া ধরা হয়।

উপপাদ্য 3. যে-কোন কোণের বৃত্তীয় মান একটি বৃত্তের কেন্দ্রে ঐ কোণ উৎপন্নকারী বৃত্তচাপ ও বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান হইবে।

(The circular measure of any angle is the ratio of the arc of a circle subtending that angle at the centre and the radius of the circle).

মনে কর, AOB কোণটির বৃত্তীয় মান θ. O-কে কেন্দ্র করিয়া OP $(=r)$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। উহার চাপ PC, কেন্দ্রে $\angle$AOB কোণটি উৎপন্ন করে। মনে কর, PC চাপের দৈর্ঘ্য s এবং PQ, ব্যাসার্ধ OP-এর সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি চাপ।

$\therefore \quad \angle$POQ $= 1$ রেডিয়ান।

যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্রস্থ যে-কোন কোণ ইহার উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী,

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle POQ} = \frac{\text{চাপ } PC}{\text{চাপ } PQ} = \frac{\text{চাপ } PC}{\text{ব্যাসার্ধ } OP}$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{\angle AOB}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \frac{\text{চাপ PC}}{\text{ব্যাসার্ধ OP}}.$$

$$\text{অতএব } \angle AOB = \left(\frac{\text{চাপ PC}}{\text{ব্যাসার্ধ OP}}\right) \text{ রেডিয়ান।}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{s}{r}, \text{ অর্থাৎ } s = r\theta.$$

1·5. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. (*a*) $55^\circ\ 12'\ 36''$কে শতক পদ্ধতিতে এবং

(*b*) $41^g\ 22^`\ 50^{``}$ কে ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(*a*) $55^\circ\ 12'\ 36'' = 55^\circ\ 12\frac{36}{60}$ মিনিট $= 55\frac{63}{5\times 60}$ ডিগ্রী

$= \frac{5521}{100\times 90}$ সমকোণ $= \frac{5521}{100\times 90}\times 100$ গ্রেড $= \frac{5521}{90}$ গ্রেড

$= 61$ গ্রেড $+ \frac{31}{90}\times 100$ মিনিট $= 61^g\ 34' + \frac{4}{9}\times 100$ সেকেণ্ড

$= 61^g\ 34'\ 44''{\cdot}4.$

(*b*) $41^g\ 22^`\ 50^{``} = 41{\cdot}2250$ গ্রেড $= \frac{41{\cdot}225}{100}$ সমকোণ।

$= \frac{41{\cdot}225}{100}\times 90^\circ = 37{\cdot}1025$ ডিগ্রী $= 37^\circ + 1025\times 60$ মিনিট

$= 37^\circ\ 6' + {\cdot}15\times 60$ সেকেণ্ড $= 37^\circ 6' 9''.$

উদাহরণ 2. (*a*) $18^\circ\ 33'\ 45''$ কে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এবং

(*b*) $\frac{4\pi^c}{9}$ কে ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(*a*) $18^\circ\ 33'\ 45'' = 18^\circ\ 33\frac{45}{60}$ মিনিট $= 18\frac{135}{4\times 60}$ ডিগ্রী

$= \frac{297}{16\times 90}$ সমকোণ $= \frac{33}{160}\times\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= \frac{33\pi^c}{320}.$

(*b*) $\frac{4\pi^c}{9} = \frac{4}{9}\times 180^\circ = 80^\circ.$

উদাহরণ 3. (*a*) $50^g\,75^{`}\,50^{``}$ কে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এবং

(*b*) $\frac{\pi^c}{12}$ কে শতক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(*a*) $50^g\,75^{`}\,50^{``}=50{\cdot}7550$ গ্রেড $=\frac{50{\cdot}755}{100}$ সমকোণ

$=\frac{10{\cdot}151}{20}\times\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $={\cdot}253775\pi$ রেডিয়ান।

(*b*) $\frac{\pi}{12}$ রেডিয়ান $=\frac{1}{12}\times 2$ সমকোণ $=\frac{1}{6}\times 100$ গ্রেড

$=16^g+\frac{2}{3}\times 100$ মিনিট $=16^g\,66^{`}+\frac{2}{3}\times 100$ সেকেণ্ড

$=16^g\,66^{`}\,66^{``}{\cdot}7.$

উদাহরণ 4. $\pi=\frac{1}{{\cdot}31831}$ ধরিয়া দেখাও যে, এক রেডিয়ান প্রায় 206265 যষ্টিক সেকেণ্ডের সমান।

π রেডিয়ান $=180^\circ.$

$\therefore$ 1 রেডিয়ান $=180^\circ\times\frac{1}{\pi}=180\times 60\times 60\times{\cdot}31831$ সেকেণ্ড

$=206264{\cdot}88$ সেকেণ্ড $=206265$ সেকেণ্ড (আসন্ন)।

উদাহরণ 5. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ 60°, অপর একটি কোণ $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান। তৃতীয় কোণটিকে শতক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

প্রথম কোণ $=60^\circ$, দ্বিতীয় কোণ $=\frac{\pi}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ.$

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি $180^\circ.$

$\therefore$ তৃতীয় কোণটি $=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ=\frac{75}{90}$ সমকোণ

$=\frac{5}{6}\times 100$ গ্রেড $=83^g\,\frac{100}{3}$ মিনিট

$=83^g\,33^{`}\,\frac{100}{3}$ সেকেণ্ড $=83^g\,33^{`}\,33^{``}{\cdot}3.$

উদাহরণ 6. দুইটি কোণের সমষ্টি 114°. একটির ডিগ্রীতে প্রকাশিত মান অপরটির গ্রেডে প্রকাশিত মানের সমান হইলে, বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

মনে কর, একটি কোণ x°.

$\therefore$ অপর কোণটি $=x^g=\frac{9x^\circ}{10}.$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x^{o}+\frac{9x^{o}}{10}=114^{\circ}$

অথবা, $\frac{19}{10}x=114$

অথবা, $x=\frac{114\times10}{19}=60.$

$\therefore$ একটি কোণ $=60^{\circ}=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$

এবং অপর কোণ $=60^{g}=60\times\frac{\pi}{200}=\frac{3\pi}{10}.$

উদাহরণ 7. বিকাল 3 টা 30 মিনিটে ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যেকার কোণকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

3টার সময় ঘণ্টার কাঁটা 3টার দাগে এবং মিনিটের কাঁটা 12 টার দাগে ছিল। 3টা 30 মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 6টার দাগে আছে এবং এই 30 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 3টার দাগ হইতে $\frac{30}{12}$ মিনিট-ঘর বা $2\frac{1}{2}$ মিনিট-ঘর সরিয়া আসিয়াছে।

$\therefore$ 3টা 30 মিনিটের সময় ঘড়ির কাঁটা দুইটির ব্যবধান $(15-2\frac{1}{2})$ মিনিট-ঘর বা $\frac{25}{2}$ মিনিট-ঘর হইয়াছে।

ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যে ব্যবধান 15 মিঃ-ঘর হইলে উহাদের মধ্যে কোণ হয় 90°

" " " " " 1 " " " " " " $\frac{90^{\circ}}{15}$

" " " " " $\frac{25}{2}$ " " " " " $6^{\circ}\times\frac{25}{2}$ বা 75°.

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ $=75^{\circ}=\frac{75\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}.$

উদাহরণ 8. 6 মিটার 2 ডেসিমিটার 7 সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $1{\cdot}9^{c}$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r সেন্টিমিটার।

এখানে বৃত্তের চাপ $s=6$ মিটার 2 ডেসিমিটার 7 সেন্টিমিটার $=627$ সে. মি.

এবং বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta=1{\cdot}9$ রেডিয়ান।

$\therefore$ $s=r\theta$ হইতে $627=1{\cdot}9r$

অথবা, $r=\frac{627}{1{\cdot}9}=330.$ $\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=330$ সে.মি.

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নোক্ত কোণগুলিকে ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(*a*) $195^g 35' 24''$, (*b*) $\frac{7}{12}\pi$.

2. নিম্নোক্ত কোণগুলিকে শতক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(*a*) $63^\circ 22' 40''.8$; (*b*) $\frac{5}{12}\pi$.

3. নিম্নোক্ত কোণগুলিকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(*a*) $45^\circ 25' 36''$; (*b*) $203^g 58' 73''$.

4. $\pi = 3{\cdot}1416$ ধরিয়া দেখাও যে, $1{\cdot}309$ রেডিয়ান $= 75^\circ$.

5. দুইটি কোণের সমষ্টি 135° এবং অন্তর 100^g. বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণ দুইটির মান নির্ণয় কর।

6. দুইটি কোণের সমষ্টি 1 রেডিয়ান এবং অন্তর 1° হইলে ডিগ্রীতে উহাদের মান কত ?

7. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 5 : 3. কোণগুলিকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

8. 1°, 2° এবং 3°-কে একক ধরিলে একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটির পরিমাপ সমান হয়। এই সমান সাধারণ মাপটি কত ?

9. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের একটি অপর একটি অপেক্ষা যত কম তৃতীয়টি অপেক্ষা তত বেশী। বৃহত্তম কোণটির ডিগ্রীর মান ক্ষুদ্রতম কোণটির গ্রেডের মানের সমান হইলে কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

10. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষকোণটির 12 গুণ হইলে ষষ্টিক এবং শতক পদ্ধতিতে ত্রিভুজটির কোণগুলিকে প্রকাশ কর।

11. একটি ত্রিভুজের একটি কোণ 70^g, অপর একটি কোণ $\frac{3}{10}\pi$ হইলে তৃতীয় কোণটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

12. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের একটি অপরটি অপেক্ষা যত কম তৃতীয়টি অপেক্ষা তত বেশী। বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণটির দ্বিগুণ হইলে কোণগুলিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

13. একটি চতুর্ভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে 60°, 60^g এবং $\frac{5}{6}\pi$ হইলে চতুর্থ কোণটি কত ?

14. একটি সুষম চতুর্ভুজের প্রত্যেকটি কোণ একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেকটি কোণ অপেক্ষা যত কম তাহাকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

15. একটি সুষম দশভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় পরিমাণ কত ?

16. n-বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের এক-একটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় পরিমাপ নির্ণয় কর।

17. দেখাও যে, একটি সুষম অষ্টভুজের প্রত্যেকটি কোণের গ্রেডে মান 12টি বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি কোণের ডিগ্রীতে মানের সমান।

18. দেখাও যে, একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেকটি কোণের গ্রেডে পরিমাপ এবং একটি সুষম দশভুজের প্রত্যেকটি কোণের ডিগ্রীতে পরিমাপের অনুপাত 5 : 6.

19. সকাল 9টা 30 মিনিটে ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যেকার কোণকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

20. দুপুর 1টা হইতে 2টার মধ্যে কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যে $186\frac{2}{9}$ গ্রেড কোণ হইবে ?

21. একটি বৃত্তের পরিধি 88 মিটার। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

22. 55·5 সে. মি. দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $66^\circ\ 15'$ কোণ উৎপন্ন করিলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ? $(\pi=\frac{333}{106})$.

23. 11 ডেসিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কত দৈর্ঘ্যের চাপ কেন্দ্রে 1·8 রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে ?

24. পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব 9,20,00,000 মাইল। সূর্যের ব্যাস পৃথিবীর কেন্দ্রে $32'$ কোণ উৎপন্ন করিলে, সূর্যের ব্যাসার্ধ কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

25. (i) একই দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তচাপ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে যথাক্রমে 75° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্ত দুইটির ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় কর।

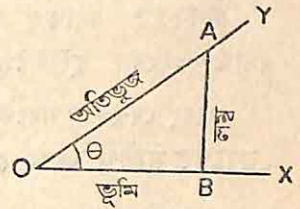
(ii) কোন বৃত্তের কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্নকারী একটি চাপের দৈর্ঘ্য অপর একটি বৃত্তের কোন চাপের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। দ্বিতীয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধের তিনগুণ হইলে, দ্বিতীয় বৃত্তের চাপটি উহার কেন্দ্রে যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহার মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

দ্বিতীয় অধ্যায়

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of an acute angle)

2·1. সংজ্ঞা ঃ

মনে কর, OX এবং OY রেখাংশদ্বয় পরস্পর মিলিত হইয়া XOY সূক্ষ্মকোণটি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণটির পরিমাণ গ্রীক অক্ষর θ (থিটা) দ্বারা সূচিত করা হইল। OY সরলরেখার যে-কোন বিন্দু A হইতে OX সরলরেখার উপর AB লম্ব টানিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ AOB উৎপন্ন হইল ; OA উহার অতিভুজ। AOB সমকোণী ত্রিভুজে θ কোণের সাপেক্ষে উহার বিপরীতে অবস্থিত AB-কে **লম্ব**, OB-কে **ভূমি** অথবা সংলগ্ন **বাহু** বলে।

$\frac{AB}{OA}, \frac{OB}{OA}, \frac{AB}{OB}, \frac{OA}{AB}, \frac{OA}{OB}, \frac{OB}{AB}$ এই ছয়টি অনুপাতকে সূক্ষ্মকোণ θ-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত বলা হয়।

ইহাদের নাম যথাক্রমে **সাইন** (sine), **কোসাইন** (cosine), **ট্যানজেণ্ট** (tangent), **কোসেকাণ্ট** (cosecant), **সেকাণ্ট** (secant), **কোট্যানজেণ্ট** (**cotangent**)। সংক্ষেপে প্রকাশ করিবার জন্য এই কোণানুপাতগুলিকে যথাক্রমে সাইন, কস, ট্যান, কোসেক, সেক ও কট বলা হয়।

অতএব, **সাইন** θ ($\sin\theta$) $= \frac{AB}{OA} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$,

কস θ ($\cos\theta$) $= \frac{OB}{OA} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$,

ট্যান θ ($\tan\theta$) $= \frac{AB}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$,

$$\text{কোসেক } \theta \ (\operatorname{cosec} \theta) = \frac{OA}{AB} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}},$$

$$\text{সেক } \theta \ (\sec \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}},$$

$$\text{কট } \theta \ (\cot \theta) = \frac{OB}{AB} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}.$$

উপরোক্ত ছয়টি কোণানুপাত ব্যতীত আরও দুইটি কোণানুপাত মাঝে মাঝে ব্যবহৃত হয়। ইহাদিগকে **ভার্সাইন** (versine) এবং **কোভার্সাইন** (coversine) বলে।

ভার্স θ (verse θ) $= 1 -$ কস θ

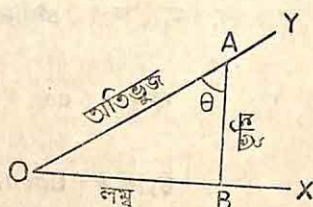
এবং কোভার্স θ (coverse θ) $= 1 -$ সাইন θ.

টীকা 1 : ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ θ-এর ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত সর্বদা ধনাত্মক হইবে। দুইটি দৈর্ঘ্যের অনুপাত বলিয়া ইহা একটি সংখ্যা, দৈর্ঘ্য নয়।

যেহেতু যে-কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু, স্তরাং **যে-কোন কোণের সাইন এবং কোসাইন কখনও এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না** [কারণ $\sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং অতিভুজ>লম্ব, অতিভুজ>ভূমি]।

অনুরূপভাবে, যে-কোন কোণের কোসেকাণ্ট এবং সেকাণ্ট কখনও এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব, ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর অথবা ভূমির সমান হইতে পারে, স্তরাং কোণের ট্যানজেণ্ট এবং কোট্যানজেণ্ট এক অপেক্ষা বৃহত্তর, ক্ষুদ্রতর অথবা উহার সমান হইতে পারে।

টীকা 2 : AOB সমকোণী ত্রিভুজে ∠OAB-এর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত নির্ণয় করিবার সময় উহার বিপরীতে অবস্থিত OB লম্ব এবং AB ভূমি অথবা সংলগ্ন বাহু হইবে।

2·2. একই কোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত-সমূহ পরিবর্তনহীন ঃ

যদিও একটি কোণের কোণানুপাতগুলি ঐ কোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত দ্বারা প্রকাশিত হয়, তথাপি ইহারা কোনক্রমেই ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর (বা আয়তনের উপর) নির্ভর করে না ; শুধু বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের উপর নির্ভর করে।

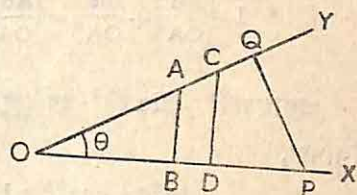
মনে কর, XOY কোণের মান θ. OY সরলরেখার যে-কোন বিন্দু A হইতে OX সরলরেখার উপর AB লম্ব টানা হইয়াছে। OY সরলরেখার O বিন্দু হইতে OX সরলরেখার উপর CD লম্ব টানা হইয়াছে এবং OX সরলরেখার যে-কোন বিন্দু P হইতে OY সরলরেখার উপর PQ লম্ব টানা হইয়াছে।

সংজ্ঞানুসারে, $\triangle AOB$ হইতে, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA}$;

$\triangle COD$ হইতে, $\sin\theta = \frac{CD}{OC}$;

$\triangle POQ$ হইতে, $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$.

প্রত্যেকটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ব্যতীত একটি সাধারণ কোণ থাকায় $\triangle AOB$, $\triangle COD$ এবং $\triangle POQ$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \quad \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{PQ}{OP}.$$

অতএব $\triangle AOB$, $\triangle COD$ বা $\triangle POQ$-এর যে-কোনটির বাহুদ্বয়ের অনুপাত দ্বারাই $\sin\theta$ প্রকাশিত হোক না কেন, উহার মানের কোন পরিবর্তন হয় না। উহা শুধু কোণ θ-এর মানের উপর নির্ভর করে।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতসমূহ কেবলমাত্র কোণের উপরই নির্ভর করে।

সুতরাং একই কোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতসমূহ পরিবর্তনহীন।

2·3. কোণানুপাতগুলির মধ্যে সম্বন্ধ ঃ

সংজ্ঞানুসারে, $\triangle OAB$ (§ 2·1) হইতে,

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OA}{AB}=\frac{1}{\frac{AB}{OA}}=\frac{1}{\sin\theta},\quad \sec\theta=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{\frac{OB}{OA}}=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{\frac{AB}{OB}}=\frac{1}{\tan\theta}.$$

আবার, $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}}=\frac{AB}{OB}=\tan\theta,\quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{OB}{OA}}{\frac{AB}{OA}}=\frac{OB}{AB}=\cot\theta.$$

এক্ষণে, $\triangle OAB$ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$OA^2=AB^2+OB^2 \qquad \cdots \qquad (1)$$

উভয়পক্ষকে OA^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$1=\frac{AB^2}{OA^2}+\frac{OB^2}{OA^2}=\left(\frac{AB}{OA}\right)^2+\left(\frac{OB}{OA}\right)^2=(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2.$$

প্রথানুযায়ী, $(\sin\theta)^2$-এর স্থলে $\sin^2\theta$ এবং $(\cos\theta)^2$-এর স্থলে $\cos^2\theta$ লিখিয়া,

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

$$\therefore\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \quad \text{এবং} \quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta.$$

(1)-এর উভয়পক্ষকে AB^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{OA^2}{AB^2}=1+\frac{OB^2}{AB^2}$$

অথবা, $$1=\left(\frac{OA}{AB}\right)^2-\left(\frac{OB}{AB}\right)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2-(\cot\theta)^2.$$

প্রথানুযায়ী, $(\operatorname{cosec}\theta)^2$-এর স্থলে $\operatorname{cosec}^2\theta$ এবং $(\cot\theta)^2$-এর স্থলে $\cot^2\theta$ লিখিয়া,

$$\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1.$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta \quad \text{এবং} \quad \cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1.$$

(1)-এর উভয়পক্ষকে OB^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{OA^2}{OB^2}=\frac{AB^2}{OB^2}+1$$

অথবা $\quad 1=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2-\left(\frac{AB}{OB}\right)^2=(\sec\theta)^2-(\tan\theta)^2.$

প্রথানুযায়ী, $(\sec\theta)^2$-এর স্থলে $\sec^2\theta$ এবং $(\tan\theta)^2$-এর স্থলে $\tan^2\theta$ লিখিয়া,

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1.$$

$$\therefore\quad \sec^2\theta=1+\tan^2\theta \quad \text{এবং} \quad \tan^2\theta=\sec^2\theta-1.$$

টীকা : কোণ θ-এর পরিবর্তে অন্য যে-কোন কোণ α (আল্‌ফা), β (বিটা), ইত্যাদি হইলেও উপরোক্ত অভেদাবলী পাওয়া যাইবে।

যথা, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\sec^2\beta-\tan^2\beta=1$, ইত্যাদি।

2·4. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $\tan A+\cot A=\sec A \operatorname{cosec} A$.

বামপক্ষ $=\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}$$

$=\sec A \operatorname{cosec} A=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=\sec\theta+\tan\theta.$

বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}}$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+\tan\theta=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর : $\frac{\tan\alpha-\sec\alpha-1}{\tan\alpha-\sec\alpha+1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

বামপক্ষ $=\frac{\tan\alpha+\sec\alpha-1}{\tan\alpha-\sec\alpha+1}=\frac{(\sec\alpha+\tan\alpha)-(\sec^2\alpha-\tan^2\alpha)}{\tan\alpha-\sec\alpha+1}$

$$=\frac{(\sec\alpha+\tan\alpha)-(\sec\alpha+\tan\alpha)(\sec\alpha-\tan\alpha)}{1-\sec\alpha+\tan\alpha}$$

$$=\frac{(\sec\alpha+\tan\alpha)(1-\sec\alpha+\tan\alpha)}{(1-\sec\alpha+\tan\alpha)}$$

$$=\sec\alpha+\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 4. সরল কর :

$$(\sec\theta-\cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\cot\theta+\tan\theta).$$

$$(\sec\theta-\cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\cot\theta+\tan\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1.$$

উদাহরণ 5. $\cos\alpha$-কে $\operatorname{cosec}\alpha$-এর মাধ্যমে এবং $\sin\alpha$-কে $\tan\alpha$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}.$$

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos\alpha=\tan\alpha.\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

উদাহরণ 6. θ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta=\frac{a}{b}$ হইলে,

$(a\sin\theta+b\cos\theta)$ রাশিটির মান নির্ণয় কর।

θ একটি সূক্ষ্মকোণ,

$$\therefore\quad\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore \quad a\sin\theta+b\cos\theta=a.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+b.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\cos\theta\left(a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+b\right)=\frac{1}{\sec\theta}(a\tan\theta+b)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}(a\tan\theta+b)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}\left(a.\frac{a}{b}+b\right)$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \frac{a^2+b^2}{b}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

উদাহরণ 7. α একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $2\sin\alpha+15\cos^2\alpha=7$ হইলে, $\cot\alpha$ অনুপাতটির মান কত ?

এখানে, $2\sin\alpha+15\cos^2\alpha=7$

অথবা, $2\sin\alpha+15(1-\sin^2\alpha)=7$

অথবা, $15\sin^2\alpha-2\sin\alpha-8=0$

অথবা, $15\sin^2\alpha+10\sin\alpha-12\sin\alpha-8=0$

অথবা, $5\sin\alpha(3\sin\alpha+2)-4(3\sin\alpha+2)=0$

অথবা, $(3\sin\alpha+2)(5\sin\alpha-4)=0.$

$\therefore\ 3\sin\alpha+2=0$ অর্থাৎ $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$

অথবা, $5\sin\alpha-4=0$ অর্থাৎ $\sin\alpha=\frac{4}{5}.$

কিন্তু α সূক্ষ্মকোণ বলিয়া, $\sin\alpha$ ঋণাত্মক হইতে পারে না ;

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

α সূক্ষ্মকোণ বলিয়া,

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.$$

উদাহরণ 8. $x=a\sin\theta$ এবং $y=b\cos\theta$ হইতে θ অপসারণ কর।

এখানে $x=a\sin\theta$

অথবা, $\sin\theta=\frac{x}{a}$ ... (1)

আবার, $y=b\cos\theta$

অথবা, $\cos\theta=\frac{y}{b}$ ... (2)

এক্ষণে, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

অথবা, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

প্রশ্নমালা II

নিম্নলিখিত অভেদগুলি (1-12) প্রমাণ কর:

1. $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta}=\sin\theta\cos\theta.$

2. $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta.$

3. (i) $\sec^6\theta-\tan^6\theta=1+3\sec^2\theta\tan^2\theta.$

 (ii) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

4. $\sin A+\cos A\cot A=\operatorname{cosec} A.$

5. $\frac{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$

6. (i) $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta.$

 (ii) $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$ [C.P.U.]

 (iii) $\sqrt{\frac{1+\cot^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=\frac{1-\cot\theta}{1-\tan\theta}.$

7. $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin^3\alpha}{2\cos^3\alpha - \cos\alpha} = \tan\alpha.$

8. (i) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} - \operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\theta - \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}.$

(ii) $\dfrac{1}{\sec\alpha + \tan\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \dfrac{1}{\sec\alpha - \tan\alpha}.$

9. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$

10. $\dfrac{1+3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{1-\sin\alpha} = (1+2\sin\alpha)^2.$

11. (i) $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2} = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha.$

(ii) $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha).$

12. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \dfrac{\sin\beta + \sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}.$

13. সরল কর :

(i) $\dfrac{1}{\sin^2\theta} - \dfrac{1}{\sec^2\theta - 1}.$ (ii) $\operatorname{cosec}\alpha - \dfrac{\cot^2\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}.$

(iii) $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}.$

(iv) $\dfrac{\tan A}{\sec A - 1} - \dfrac{\sin A}{1+\cos A}.$

(v) $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta).$

(vi) $(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2.$

14. (i) $1+4\sec^2\theta\tan^2\theta$-কে একটি পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর।

(ii) $1+2\sin\alpha\cos\alpha$-কে একটি পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর।

15. (i) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha.$$

(ii) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \cot\theta$ হইলে, দেখাও যে,

$$\sqrt{2}\cos\theta = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

16. (i) $x = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^4\alpha = 1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan^4\alpha - \tan^2\alpha = 1.$$

17. (i) $\cos\theta + \cos^2\theta = 1$ হইলে, দেখাও যে, $\sin^2\theta + \sin^4\theta = 1.$

(ii) $\sec\theta + \tan\theta = x$ হইলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

18. (i) $1 + 4a^2 = 4a \operatorname{cosec}\theta$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = 2a \text{ অথবা } \frac{1}{2a}.$$

(ii) $\cot^2\theta = 1 + e^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$\operatorname{cosec}\theta + \cot^3\theta \sec\theta = (2+e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

19. (i) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha.$$

(ii) $\tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\beta$ হইলে, দেখাও যে, $\cos^2\beta = 2\cos^2\alpha.$

20. (i) $p\tan\alpha = \tan p\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{\sin^2 p\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{p^2}{1+(p^2-1)\sin^2\alpha}.$$

(ii) $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ হইলে, দেখাও যে,

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

21. α একটি সূক্ষ্মকোণ হইলে,

(i) $\sec\alpha$-কে অন্য কোণানুপাতগুলির প্রত্যেকটির মাধ্যমে পৃথকভাবে প্রকাশ কর ;

এবং (ii) $\cot\alpha = \frac{3}{4}$ হইলে, $\sin\alpha$ ও $\cos\alpha$-এর মান নির্ণয় কর।

22. (i) θ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot\beta = \frac{b}{a}$, হইলে,

$$\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta} \text{ রাশিটির মান নির্ণয় কর।}$$

(ii) α, β সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ও $\cos\beta = \frac{5}{13}$ হইলে,

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \text{ রাশিটির মান নির্ণয় কর।}$$

23. (i) θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $3\sin^2\theta + 7\cos^2\theta = 4$ হইলে, $\cot\theta$-এর মান কত ?

(ii) α একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5$ হইলে, $\cos \alpha$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) x একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $1+\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$ হইলে, দেখাও যে, $\tan x = 1$ বা $\frac{1}{2}$.

(iv) $a^2 \sec^2\theta - b^2 \tan^2\theta = c^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$\operatorname{cosec} \theta = \pm \sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2-c^2}}.$$

(v) $(a^2-b^2) \cos x + 2ab \sin x = a^2+b^2$ হইলে, $\cot x$ ও $\sec x$-এর মান কত ?

24. (i) $x = a \sec \theta$ এবং $y = b \tan \theta$ হইতে θ অপসারণ কর।

(ii) $x = c(\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha)$ এবং $y = c(\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha)$ হইতে α অপসারণ কর।

(iii) $m = \tan A + \sin A$ এবং $n = \tan A - \sin A$ হইতে A অপসারিত কর।

(iv) $p = \sin \beta + \cos \beta$ এবং $q = \tan \beta + \cot \beta$ হইতে β অপনয়ন কর।

(v) $u = \sin \theta + \cos \theta$ এবং $v = \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta$ হইতে θ অপসারণ কর।

(vi) $a \sin \theta + b \cos \theta + c = a' \sin \theta + b' \cos \theta + c' = 0$ হইতে θ অপসারণ কর।

25. (i) a^2 একটি ধনাত্মক রাশি হইলে, দেখাও যে, $\sin \theta$ কখনও $a + \frac{1}{a}$-এর সমান হইবে না।

[এখানে $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 1 - \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)$
$= -\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) =$ ঋণাত্মক।

কিন্তু $\cos^2\theta$ ঋণাত্মক হইতে পারে না। সুতরাং ইত্যাদি।]

(ii) a^2 এবং b^2 দুইটি ধনাত্মক রাশি হইলে, দেখাও যে, $\cos \phi$ কখনও $\frac{a^2+b^2}{2ab}$-এর সমান হইবে না।

(iii) a^2 এবং b^2 দুইটি ধনাত্মক রাশি হইলে, দেখাও যে, $\sec \psi$ কখনও $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$-এর সমান হইবে না।

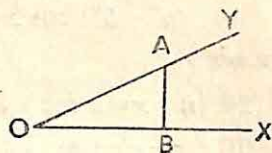
তৃতীয় অধ্যায়

কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত

(Trigonometrical Ratios of Some Standard Angles)

3·1. 0° কোণের কোণানুপাত ঃ

মনে কর, ∠XOY একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক কোণ। OY সরলরেখার A বিন্দু হইতে AB, OX সরলরেখার উপর লম্ব। সুতরাং ∠XOY যত ছোট হইবে AB সরলরেখার দৈর্ঘ্য তত ছোট হইবে। এইরূপে চরম অবস্থায় যখন ∠AOB = 0° হইবে তখন AB বিলুপ্ত হইবে অর্থাৎ

AB = 0 হইবে এবং OA সরলরেখা সর্বদা OAB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ থাকিয়া, OB সরলরেখার সহিত মিলিয়া গিয়া, OA = OB হইবে।

সুতরাং, OAB ত্রিভুজ হইতে, উক্ত চরম অবস্থায়

$$\sin 0^\circ = \frac{AB}{OA} = 0, \cos 0^\circ = \frac{OB}{OA} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{AB}{OB} = 0, \sec 0^\circ = \frac{OA}{OB} = 1,$$

$$\text{cosec}\, 0^\circ = \frac{OA}{AB} = \text{অসীম (undefined)}$$

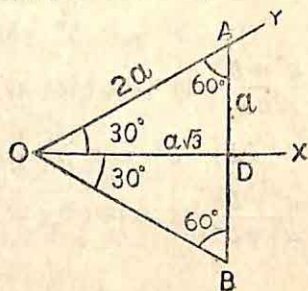
$$\text{এবং } \cot 0^\circ = \frac{OB}{AB} = \text{অসীম।}$$

টীকা ঃ কোন সসীম সংখ্যাকে 0-দ্বারা অর্থাৎ অসীম ক্ষুদ্ররাশি দ্বারা ভাগ করা যায় না বলিয়া cosec 0° এবং cot 0°-এর মান নির্দিষ্ট নহে (undefined).

3·2. 30° কোণের কোণানুপাত ঃ

মনে কর, ∠XOY = 30°. OY সরলরেখার A বিন্দু হইতে OX সরলরেখার উপর AD লম্ব টানা হইল।

$$\angle OAD = 60^\circ.$$

AD-কে B পর্যন্ত এরূপ ভাবে বর্ধিত করা হইল, যেন AD = DB হয়। OB যুক্ত করা হইল।

AOD ও BOD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে AD = BD এবং OD সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle OBD = \angle OAD = 60^\circ$.

আবার $\angle AOB = 60^\circ$.

সুতরাং OAB একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

∴ $OA = OB = AB = 2AD$.

∴ OAD সমকোণী ত্রিভুজে $AD = a$ ধরিলে, $OA = 2a$ এবং

$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

সুতরাং OAD ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{OA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{OD}{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{OD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \frac{OD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{OA}{AD} = \frac{2a}{a} = 2 \text{ এবং } \sec 30^\circ = \frac{OA}{OD} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{8}}.$$

3·3. 45° কোণের কোণানুপাত :

মনে কর, $\angle XOY = 45^\circ$. OY সরলরেখার A বিন্দু হইতে OX সরলরেখার উপর AB লম্ব টানা হইয়াছে।

OAB সমকোণী ত্রিভুজের $\angle AOB = 45^\circ$.

∴ $\angle OAB = 45^\circ$.

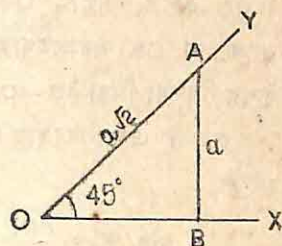
সুতরাং $AB = OB$.

∴ OAB সমকোণী ত্রিভুজে $AB = OB = a$ ধরিলে,

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

সুতরাং OAB ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{OB}{OA} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{a}{a} = 1, \ \cot 45^\circ = \frac{OB}{AB} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{OA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = 2 \text{ এবং } \sec 45^\circ = \frac{OA}{OB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

3·4. 60° কোণের কোণানুপাত ঃ

§ 3·2-এর চিত্রে $\angle OAD = 60^\circ$. $\angle OAD$ কোণের সম্পর্কে OAD ত্রিভুজের লম্ব $OD = a\sqrt{3}$; ভূমি $AD = a$, অতিভুজ $OA = 2a$.

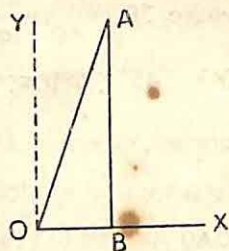
সুতরাং OAD ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin 60^\circ = \frac{OD}{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{AD}{OA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{OD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{AD}{OD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{OA}{OD} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ এবং } \sec 60^\circ = \frac{OA}{AD} = \frac{2a}{a} = 2.$$

3·5. 90° কোণের কোণানুপাত ঃ

পার্শ্বের চিত্রে XOA কোণটি এক সমকোণের নিকটবর্তী একটি কোণ। A হইতে OX সরলরেখার উপর AB লম্ব। সুতরাং $\angle XOA$ যতই 90° (অর্থাৎ $\angle XOY$)-এর নিকটবর্তী হইবে, OB ততই ছোট হইবে। এইরূপে চরম অবস্থায় যখন $\angle XOA = 90^\circ$ হইবে, তখন OB বিলুপ্ত হইবে, অর্থাৎ $OB = 0$ হইবে এবং AB সরলরেখা OA সরলরেখার সহিত OY সরলরেখার উপর মিশিয়া গিয়া $AB = OA$ হইবে।

সুতরাং এরূপ অবস্থায় OAB ত্রিভুজ হইতে, OA, OB এবং AB-এর চরম মান লইয়া,

$$\sin 90^\circ = \frac{AB}{OB} = 1, \qquad \cos 90^\circ = \frac{OB}{OA} = 0,$$

$$\tan 90^\circ = \frac{AB}{OB} = \text{অসীম}, \qquad \operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{OA}{AB} = 1,$$

$$\sec 90^\circ = \frac{OA}{OB} = \text{অসীম এবং } \cot 90^\circ = \frac{OB}{OA} = 0.$$

টীকা ঃ একটি সসীমরাশিকে একটি অসীম ক্ষুদ্ররাশি দ্বারা ভাগ করিলে কোন সসীম মান পাওয়া যায় না। সেই কারণে tan 90° এবং sec 90° অসীম।

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ কোণগুলির কোণানুপাতের মান সর্বদাই ব্যবহৃত হয় বলিয়া ইহাদের বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে। যে-কোন কোণের sine-এর মান জানা থাকিলে অন্য সব কোণানুপাতগুলির মান পাওয়া যাইবে। উপরোক্ত কোণগুলির sine-এর মান মনে রাখিবার একটি সহজ উপায় আছে। উপরোক্ত কোণগুলির অধঃক্রম অনুসারে লিখিয়া 0, 1, 2, 3, ও 4 রাশিগুলি লিখিতে হইবে এবং যে-কোণের sine-এর মান প্রয়োজন, সেই কোণের অবস্থানের সম্পর্কে যে-রাশিটি আছে তাহাকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের বর্গমূল করিলেই নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sin 60^\circ$ নির্ণয় করিবার সময় দেখা যাইবে যে, 60° চতুর্থ-স্থানে আছে—চতুর্থ স্থানের রাশি হইল 3. 3-কে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের বর্গমূল হইল $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; সুতরাং $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

অনুরূপভাবে, cosine-এর মান নির্ণয় করিতে লে $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ও 90° কোণগুলিকে যথাক্রমে 4, 3, 2, 1 ও 0 দ্বারা চিহ্নিত করিয়া এবং ঐ ক্রমিক সংখ্যাগুলিকে 4 দিয়া ভাগ করিয়া ভাগফলের বর্গমূল লইয়া নির্দিষ্ট কোণের cosine-এর মান পাওয়া যাইবে।

নীচে উপরোক্ত কোণগুলির sine, cosine ও tangent-এর মানের তালিকা দেওয়া হইল। অবশিষ্ট কোণানুপাতগুলি রীতি অনুসারে ইহাদের অন্যোন্যক (reciprocal) হইবে।

কোণ	sin	cos	tan
0° বা 0	0	1	0
30° বা $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45° বা $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60° বা $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90° বা $\frac{\pi}{2}$	1	0	অসীম

3·6. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $\cos 60^\circ = 1 - 2\sin^2 30^\circ$.

ডানপক্ষ $= 1 - 2(\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ =$ বামপক্ষ।

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{3}$.

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \text{ডানপক্ষ}।$$

উদাহরণ 3. $\sin 30^\circ \tan^2 45^\circ \cos^3 60^\circ$ রাশিটির মান কত ?

$\sin 30^\circ \tan^2 45^\circ \cos^3 60^\circ = \frac{1}{2} \times (1)^2 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{16}$.

উদাহরণ 4. সরল কর : $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$.

$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

উদাহরণ 5. সরল কর : $\tan\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6} \tan^2\frac{\pi}{3}$.

$$\tan\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6} \tan^2\frac{\pi}{3} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}.$$

উদাহরণ 6. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sec\theta \tan\theta = 2\sqrt{3}$ হইলে, θ কোণের মান কত ?

এখানে, $\sec\theta \tan\theta = 2\sqrt{3}$

অথবা, $\dfrac{1}{\cos\theta} . \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sqrt{3}$

অথবা, $\sin\theta = 2\sqrt{3}\cos^2\theta = 2\sqrt{3}(1 - \sin^2\theta)$

অথবা, $2\sqrt{3}\sin^2\theta + \sin\theta - 2\sqrt{3} = 0$

অথবা, $2\sqrt{3}\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3\sin\theta - 2\sqrt{3} = 0$

অথবা, $2\sin\theta(\sqrt{3}\sin\theta + 2) - \sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta + 2) = 0$

অথবা, $(\sqrt{3}\sin\theta + 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0.$

সুতরাং, $\sqrt{3}\sin\theta + 2 = 0$ অর্থাৎ $\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}},$

অথবা, $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$ অর্থাৎ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ বলিয়া, $\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ হইবে না।

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$ অর্থাৎ $\theta = 60^\circ.$

উদাহরণ 7. কোন্ সূক্ষ্মকোণ x, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে?

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

অথবা, $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2$

অথবা, $2\sin x\cos x = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 - 1 = 1$

অথবা, $4\sin^2 x\cos^2 x = 1$

অথবা, $4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1$

অথবা, $4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$

অথবা, $(2\sin^2 x - 1)^2 = 0$

অথবা, $2\sin^2 x - 1 = 0$

অথবা, $2\sin^2 x = 1$

অথবা, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because$ x একটি সূক্ষ্মকোণ)

$= \sin 45^\circ.$

$\therefore x = 45^\circ.$

উদাহরণ 8. α, β দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ ও $\cos(\alpha + \beta) = 0$ হইলে ; α ও β কোণ দুইটির মান নির্ণয় কর।

এখানে, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\therefore (\alpha - \beta) = 30^\circ$ ... ... (1)

আবার, $\cos(\alpha+\beta)=0=\cos 90^\circ$

$\therefore\ \alpha+\beta=90^\circ$ ... ... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া, $2\alpha=120^\circ$, অর্থাৎ $\alpha=60^\circ$.

পুনরায়, (2) হইতে, $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

প্রশ্নমালা III

নিম্নলিখিত অভেদগুলি (1—12) প্রমাণ কর :

1. $2\cos^2 30^\circ-1=\cos 60^\circ$.
2. $\dfrac{1+\tan^2 \pi/6}{1-\tan^2 \pi/6}=\sec\dfrac{\pi}{3}$.
3. $3\sin 30^\circ-4\sin^3 30^\circ=1$.
4. $4\cos^3\dfrac{\pi}{6}-3\cos\dfrac{\pi}{6}=0$.
5. $\dfrac{\tan\frac{1}{4}\pi}{1+\tan^2\frac{1}{4}\pi}=\dfrac{1}{2}$.
6. $\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ=\sin^2 60$.
7. $\dfrac{\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\sin 60^\circ$.
8. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{1}{6}\pi}{1-\cos\frac{1}{6}\pi}}=\sec\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{3}$.
9. $\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$.
10. $\sin 60^\circ\cos 30^\circ-\cos 60^\circ\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.
11. $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}\tan\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{2}$.
12. $\dfrac{1+2\sin 60^\circ\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ}+\dfrac{1-2\sin 60^\circ\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ-\cos 60^\circ}=\tan 60^\circ$.
13. $3\tan^2 45^\circ-\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\cot^2 30^\circ+\frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$ রাশিটির মান কত ?
14. সরল কর : $\dfrac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}+(\sec^2 45^\circ-\cot^2 45^\circ)-(\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ)$.
15. সরল কর : $4\sin^2 30^\circ+2\cos^2 45^\circ-3\cos^2 60^\circ$.
16. সরল কর : $\tan 30^\circ\sin 60^\circ+\tan 60^\circ\cos 30^\circ$.

17. সরল কর : $\dfrac{\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ} + \dfrac{\sin^2 90^\circ - \cos^2 60^\circ}{\frac{1}{4}\tan^2 30^\circ}$.

18. θ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$ হইলে, θ কোণটির মান নির্ণয় কর।

19. α একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ হইলে, α কোণটির মান নির্ণয় কর।

20. কোন্ সূক্ষ্মকোণ x, প্রদত্ত সমীকরণ $3(\sec^2 x + \tan^2 x) = 5$ কে সিদ্ধ করে ?

21. সমাধান কর : $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$; $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$.

22. (i) একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B, C এবং $\sin(B + C - A) = 1 = \cos(C + A - B)$ হইলে, A, B ও C-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) α ও β দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ (ডিগ্রীতে প্রকাশিত) এবং $\sin(2\alpha - \beta) = 1$ ও $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\alpha = 50^\circ \text{ এবং } \beta = 10^\circ.$$

23. $\tan^2 \frac{3}{4}\pi - \cos^2 \frac{1}{3}\pi = x \sin\frac{1}{4}\pi \cos\frac{3}{4}\pi \tan\frac{2}{3}\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$x = 0{\cdot}87.$$

24. (i) θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে, $\sqrt{3}(\tan\theta + \cot\theta) = 4$ সমীকরণটি সমাধান করিয়া দেখাও যে, $\theta = 30^\circ$ অথবা 60°.

(ii) $r\cos\theta = \sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta = 1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\theta = 30^\circ \text{ এবং } r = 2.$$

25. (i) $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ এবং $z = r\cos\theta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

(ii) $r = 2$, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$ হইলে, দেখাও যে, $x = y = z/\sqrt{6}$.

চতুর্থ অধ্যায়

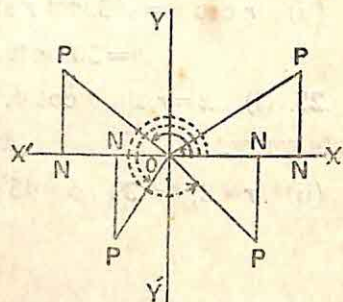
পূরককোণের, সম্পূরককোণের এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত সংযুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of Complementary angles, Supplementary angles and of angles associated with a given angle)

4·1. যে-কোন কোণের কোণানুপাত :

দ্বিতীয় অধ্যায়ে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। এখানে, যে-কোন কোণের কোণানুপাতের সংজ্ঞা নিধারণ করা হইবে।

XOX′ ও YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিলে কাগজের সমতলটি চারিভাগে বিভক্ত হয়। এই বিভাগগুলির প্রত্যেকটিকে এক একটি **পাদ** (**quadrant**) বলে। XOY-কে প্রথম পাদ, YOX′-কে দ্বিতীয় পাদ, X′OY′-কে তৃতীয় পাদ এবং Y′OX-কে চতুর্থ পাদ বলে।

একটি রশ্মিরেখা OP উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী আবর্তনের ফলে যে-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে **ধনাত্মক** কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে আবর্তনের ফলে যে-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে **ঋণাত্মক** কোণ বলে।

কোণগুলি ধনাত্মক এবং উহাদের পরিমাণ 0° অপেক্ষা বৃহত্তর ও 90° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে OP সরলরেখা প্রথম পাদে, 90° অপেক্ষা বৃহত্তর ও 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে OP সরলরেখা দ্বিতীয় পাদে, 180° অপেক্ষা বৃহত্তর ও 270° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে OP সরলরেখা তৃতীয় পাদে এবং 270° অপেক্ষা বৃহত্তর ও 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে থাকিবে।

কোন ধনাত্মক কোণ 360° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তাহা হইতে 360° বা 360°-এর কোন এক গুণিতক কোণ বিয়োগ করিয়া 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি ধনাত্মক কোণ পাওয়া যায়। 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এই ধনাত্মক কোণটির ক্ষেত্রে OP সরলরেখা যে-পাদে অবস্থিত থাকে, মূল কোণটির ক্ষেত্রেও OP সরলরেখা সেই পাদে থাকিবে।

উদাহরণস্বরূপ, কোণের পরিমাণ 700° হইলে, উহা হইতে 360° বিয়োগ করিলে 340° পাওয়া যায়। এই 340° কোণের ক্ষেত্রে OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে থাকে বলিয়া 700° কোণের ক্ষেত্রেও OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে থাকিবে।

কোণগুলি ঋণাত্মক এবং উহাদের পরিমাণ 0° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও -90° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে, -90° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও -180° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে OP সরলরেখা তৃতীয় পাদে, -180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও -270° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে OP সরলরেখা দ্বিতীয় পাদে এবং -270° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও -360° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে OP সরলরেখা প্রথম পাদে থাকিবে।

কোন ঋণাত্মক কোণ -360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে তাহার সহিত 360° বা 360°-এর কোন এক গুণিতক কোণ যোগ করিলে -360° অপেক্ষা বৃহত্তর একটি ঋণাত্মক কোণ পাওয়া যায়। -360° অপেক্ষা বৃহত্তর এই ঋণাত্মক কোণটির ক্ষেত্রে OP সরলরেখা যে-পাদে অবস্থিত থাকে, মূল কোণটির ক্ষেত্রেও OP সরলরেখা সেই পাদে থাকিবে।

উদাহরণস্বরূপ, কোণের পরিমাণ -840° হইলে উহার সহিত $360^\circ \times 2$ যোগ করিলে -120° পাওয়া যায়। এই -120° কোণের ক্ষেত্রে OP সরলরেখা তৃতীয় পাদে থাকে বলিয়া -840° কোণের ক্ষেত্রেও OP সরলরেখা তৃতীয় পাদে থাকিবে।

ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP কে generating line বা radius vector বলা হয়। কোন একটি কোণ θ, চারি সমকোণ বা চারি সমকোণের কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে বা হ্রাস পাইলে OP সরলরেখাটি সম্পূর্ণ এক বা একাধিক বার ঘুরিয়া পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসে। সুতরাং অসংখ্য কোণের একই সীমারেখা হইতে পারে। এই সকল কোণকে co-terminal angles বলে এবং উহাদিগকে $n.360^\circ+\theta$ (n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একটি রশ্মিরেখা OP উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অথবা ঘড়ির কাঁটার দিকে θ কোণ উৎপন্ন করিলে

θ-এর মান যাহাই হউক না কেন, OP সরলরেখা উপরোক্ত চারিটি পাদের যে-কোন একটিতে অবস্থান করিবে। P বিন্দু হইতে OX অথবা OX′-এর উপর PN লম্ব টানা হইল। OPN সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাতের দ্বারা θ কোণের কোণানুপাতের সংজ্ঞা নির্দেশিত হইবে।

$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\theta\text{-কোণের সম্মুখস্থ বাহু}}{\text{অতিভুজ}}, \quad \cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\theta\text{-কোণসংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}}.$$

এইরূপে, $\tan\theta = \frac{PN}{ON}$, $\operatorname{cosec}\ \theta = \frac{OP}{PN}$, $\sec\theta = \frac{OP}{ON}$ এবং $\cot\ \theta = \frac{ON}{PN}$.

θ-কোণ সূক্ষ্মকোণ হইলে কোণানুপাতগুলির মধ্যে যে-সকল সম্বন্ধ আছে, θ যে-কোন কোণ হইলেও সেই সকল সম্বন্ধগুলি বিদ্যমান থাকে।

কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন নির্ণয় করিবার কালে লেখ-অঙ্কনের রীতি অনুযায়ী মনে রাখিতে হইবে যে, OX ও OY-এর দিকে দূরত্ব মাপিলে তাহাকে ধনাত্মক এবং OX′ ও OY′-এর দিকে দূরত্ব মাপিলে তাহাকে ঋণাত্মক বলিয়া গণ্য করা হয়। OP সরলরেখা যে-পাদেই থাকুক না কেন, OP-এর দিকে যে-দূরত্ব মাপা হয়, তাহাকে সর্বদা ধনাত্মক বলিয়া গণ্য করা হয়।

সুতরাং, (i) OP সরলরেখা প্রথম পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের PN, ON এবং OP বাহুগুলি সকলেই ধনাত্মক। অতএব, XOP কোণের কোণানুপাতগুলি সকলেই ধনাত্মক হইবে।

(ii) OP সরলরেখা দ্বিতীয় পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের PN ধনাত্মক, ON ঋণাত্মক, OP ধনাত্মক। অতএব কোণানুপাতগুলির শুধু sin ও cosec ধনাত্মক এবং বাকীগুলি ঋণাত্মক।

(iii) OP সরলরেখা তৃতীয় পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের PN ও ON ঋণাত্মক এবং OP ধনাত্মক। অতএব কোণানুপাতগুলির শুধু tan ও cot ধনাত্মক এবং বাকীগুলি ঋণাত্মক।

(iv) OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের PN ঋণাত্মক এবং ON ও OP ধনাত্মক। অতএব কোণানুপাতগুলির শুধু cos ও sec ধনাত্মক এবং বাকীগুলি ঋণাত্মক।

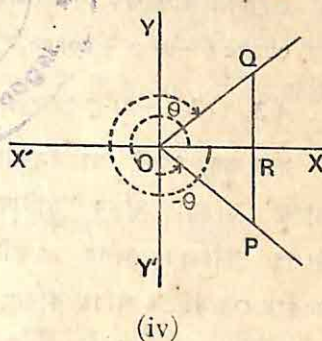
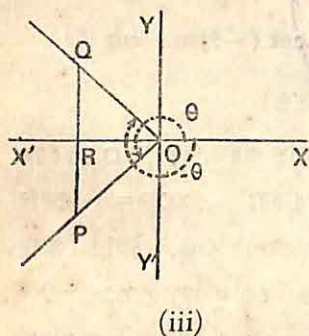
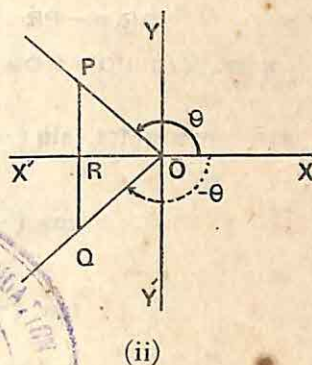
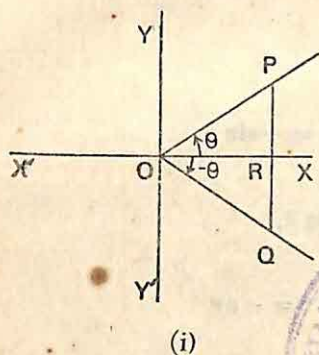
OP সরলরেখা OX-এর সহিত ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করিলেও, OP যে-পাদে থাকিবে, কোণানুপাতগুলির চিহ্ন সেই অনুসারে স্থিরীকৃত হইবে।

নিম্নের সারণীটির সাহায্যে বিভিন্ন পাদে কোণানুপাতসমূহের চিহ্নগুলি মনে রাখা হয়ঃ

সাইন ও কোসেক ধনাত্মক	সমস্ত কোণানুপাত ধনাত্মক
ট্যান ও কট ধনাত্মক	কস ও সেক ধনাত্মক

OP-এর অবস্থান অনুযায়ী কোণানুপাতগুলির চিহ্ন দেওয়া হইয়াছে। ইহাকে **"সমস্ত, সাইন (কোসেক), ট্যান (কট), কস (সেক)"** সূত্র আখ্যা দেওয়া হয়।

4·2. $(-\theta)$-কোণের কোণানুপাতঃ

মনে কর, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP, উহার প্রথম অবস্থান OX

হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। পুনরায় OP সরলরেখা উহার OX অবস্থান হইতে আরম্ভ

করিয়া ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরিয়া θ কোণের সমান বা $\angle XOP$-এর সমান $\angle XOQ$ উৎপন্ন করিল। সুতরাং $\angle XOQ$ ঋণাত্মক এবং $\angle XOQ = -\theta$.

OP সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P হইতে OX-এর উপর [চিত্র (i) ও (iv)-এ] অথবা OX′-এর উপর [চিত্র (ii) ও (iii)-এ] PR লম্ব টানিয়া উহাকে বর্ধিত কর ; উহা যেন OQ-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, POR ও QOR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\angle POR = \angle QOR$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে)

[$\because$ $\angle XOP = \angle XOQ$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে)]

এবং OR সাধারণ বাহু।

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব, অনুরূপ বাহুগুলি মাপে সমান হইবে। প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে,

$$QR = -PR \quad \text{এবং} \quad OQ = OP.$$

ঘূর্ণায়মান রেখা OP ও OQ উভয়েই ধনাত্মক।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\sin(-\theta) = \dfrac{QR}{OQ} = \dfrac{-PR}{OP} = -\sin\theta$

$$\cos(-\theta) = \frac{OR}{OQ} = \frac{OR}{OP} = \cos\theta,$$

$$\tan(-\theta) = \frac{QR}{OR} = \frac{-PR}{OR} = -\text{an}$$

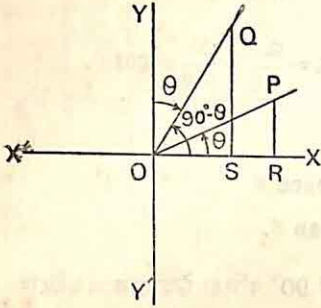
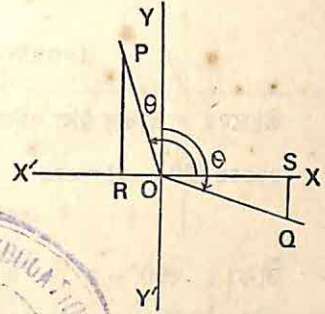
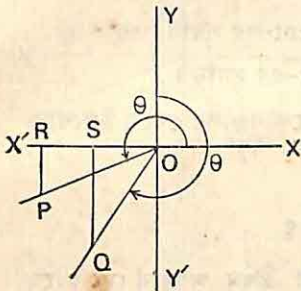
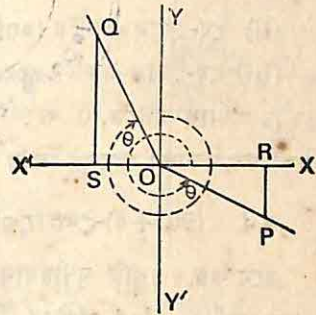
উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

4·3. $(90° - \theta)$-কোণের কোণানুপাতঃ

মনে কর, একটি আবর্তনকারী সরলরেখা OP, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। অপর একটি আবর্তনকারী সরলরেখা OQ, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর উহার OY অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরিয়া $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল।

সুতরাং $\angle XOQ = 90° - \theta$.

OP এবং OQ সরলরেখার উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু লও যাহাতে OP = OQ হয়। P ও Q হইতে OX বা OX′-এর উপর যথাক্রমে PR ও QS লম্ব টান।

(i) ও (iii) চিত্রানুযায়ী, OP প্রথম বা তৃতীয় পাদে থাকিলে OQও সেই পাদে থাকিবে এবং (ii) ও (iv) চিত্রানুযায়ী, OP দ্বিতীয় পাদে থাকিলে OQ চতুর্থ পাদে ও OP চতুর্থ পাদে থাকিলে OQ দ্বিতীয় পাদে থাকিবে।

এখন POR ও QOS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\angle POR = \angle OQS$ [$\because$ $\angle XOP = \angle YOQ$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে)]

এবং $OP = OQ$.

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব, অনুরূপ বাহুগুলি মাপে সমান হইবে। প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে,

$$QS = OR, \quad OS = PR, \quad OQ = OP.$$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\sin(90^\circ-\theta)=\sin\angle XOQ=\dfrac{QS}{OQ}=\dfrac{OR}{OP}=\cos\theta.$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos\angle XOQ=\frac{OS}{OQ}=\frac{PR}{OP}=\sin\theta.$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\tan\angle XOQ=\frac{QS}{OS}=\frac{OR}{PR}=\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta,\quad \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

এবং $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta.$

টীকা : $(90^\circ-\theta)$ ও θ কোণ দুইটির সমষ্টি 90° বলিয়া উহাদের একটিকে অপরটির **পূরক** (complementary) কোণ বলে। এই পূরককোণ দুইটির

(*i*) যে-কোন একটির sine অপরটির cosine-এর সমান,

(ii) যে-কোন একটির tangent অপরটির cotangent-এর সমান, এবং

(iii) যে-কোন একটির secant অপরটির cosecant-এর সমান।

তৃতীয় অধ্যায় হইতে, 0° ও 90° এবং 30° ও 60° পূরককোণগুলির ক্ষেত্রে উপরোক্ত সিদ্ধান্তের সত্যতা সহজেই নির্ণয় করা যায়।

4·4. $(90^\circ+\theta)$-কোণের কোণানুপাত :

মনে কর, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। পুনরায়, উহা ঐ একই দিকে ঘুরিয়া $\angle POQ=90^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিল। সুতরাং $\angle XOQ=90^\circ+\theta.$

OP এবং OQ সরলরেখার উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু লও যাহাতে $OP=OQ$ হয়। P ও Q হইতে OX বা OX′-এর উপর যথাক্রমে PR ও QS লম্ব টান।

এখন POR ও QOS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\angle POR=\angle OQS$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে)

[$\because$ OP, OQ-এর উপর লম্ব, অর্থাৎ $\angle POR=\angle QOS$ কোণের পূরক]

এবং $OP=OQ.$

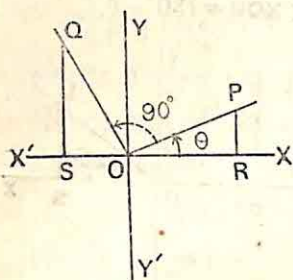
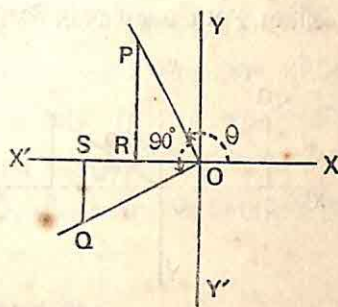
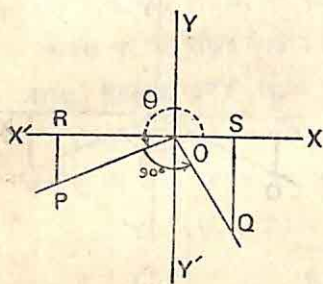
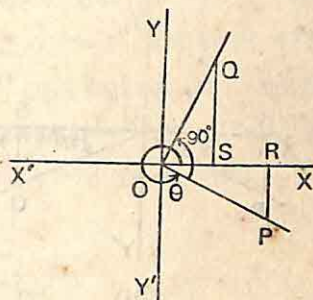
সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব অনুরূপ বাহুগুলি মাপে সমান হইবে।

প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে, QS = OR, OS = −PR, OQ = OP.

∴ সংজ্ঞানুসারে, $\sin(90^\circ+\theta)=\sin\angle XOQ=\frac{QS}{OQ}=\frac{OR}{OP}=\cos\theta,$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos\angle XOQ=\frac{OS}{OQ}=\frac{-PR}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\tan\angle XOQ=\frac{QS}{OS}=\frac{OR}{-PR}=-\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$\text{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta$, $\sec(90^\circ+\theta)=-\text{cosec}\,\theta$

এবং $\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta.$

4·5. $(180^\circ-\theta)$-কোণের কোণানুপাত ঃ

মনে কর, একটি আবর্তনকারী সরলরেখা OP, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। মনে কর, অপর একটি সরলরেখা OQ (= OP), যাহার প্রথম অবস্থান OX

হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OX′ অবস্থানে আসিয়া 180° কোণ উৎপন্ন করিল এবং পুনরায় উহা OX′ অবস্থান হইতে বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। সুতরাং $\angle XOQ = 180^\circ - \theta$.

OP এবং OQ সরলরেখার উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু লও যাহাতে OP = OQ হয়। P ও Q হইতে OX বা OX′-এর উপর যথাক্রমে PR ও QS লম্ব টান।

এখন POR ও QOS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\angle POR = \angle QOS$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে) এবং OP = OQ.

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব, অনুরূপ বাহুগুলি মাপে সমান হইবে। প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে,

$$QS = PR, \quad OS = -OR, \quad OQ = OP.$$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \angle XOQ = \dfrac{QS}{OQ} = \dfrac{PR}{OP} = \sin\theta$,

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos \angle XOQ = \frac{OS}{OQ} = \frac{-OR}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan \angle XOQ = \frac{QS}{OS} = \frac{PR}{-OR} = -\tan\theta.$$

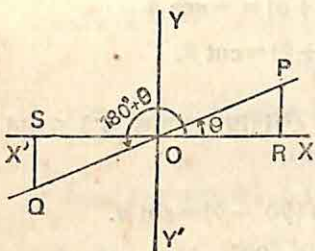
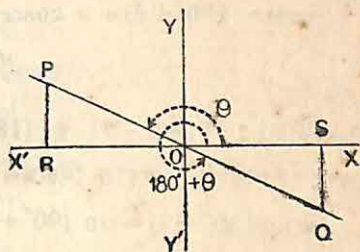
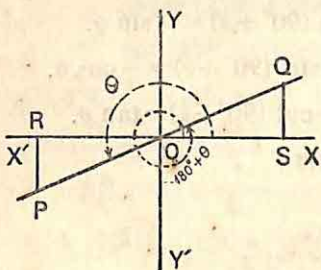
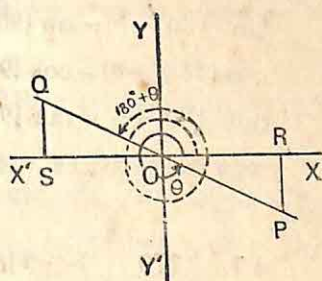
উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$$\textbf{cosec}\,(180^\circ-\theta)=\textbf{cosec}\,\theta,\quad \textbf{sec}\,(180^\circ-\theta)=-\textbf{sec}\,\theta$$

এবং $\textbf{cot}\,(180^\circ-\theta)=-\textbf{cot}\,\theta.$

টীকা : $(180^\circ-\theta)$ এবং θ কোণ দুইটির সমষ্টি 180° বলিয়া উহাদের একটিকে অপরটির **সম্পূরক** (supplementary) কোণ বলে। এই সম্পূরক কোণ দুইটির (i) যে-কোন একটির sine অপরটির sine-এর সমান, (ii) যে-কোন একটির cosine অপরটির cosine-এর সমান কিন্তু উহারা পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (ii) যে-কোন একটির tangent অপরটির tangent-এর সমান কিন্তু উহারা পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

4·6. $(180^\circ+\theta)$-কোণের কোণানুপাত :

মনে কর, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল এবং পুনরায় একই দিকে ঘুরিয়া $\angle POQ=180^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিল। সুতরাং $\angle XOQ=180^\circ+\theta$ এবং OP ও OQ একই সরলরেখায় অবস্থিত। OP = OQ লইয়া, P ও Q হইতে OX বা OX′-এর উপর যথাক্রমে PR ও QS লম্ব টান।

এখন POR ও QOS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\angle POR = \angle QOS$ (কেবল মাপের ক্ষেত্রে) [∵ POQ একটি সরলরেখা]

এবং $OP = OQ$.

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব অনুরূপ বাহুগুলি মাপে সমান হইবে। প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে, $QS = -PR,\quad OS = -OR,\quad OQ = OP.$

সংজ্ঞানুসারে,

$$\sin(180^\circ + \theta) = \sin \angle XOQ = \frac{QS}{OQ} = \frac{-PR}{OP} = -\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = \cos \angle XOQ = \frac{OS}{OQ} = \frac{-OR}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \angle XOQ = \frac{QS}{OS} = \frac{-PR}{-OR} = \frac{PR}{OR} = \tan\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$$\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta,\quad \sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$$

এবং $\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta.$

টীকা : $(180^\circ - \theta)$ ও $(180^\circ + \theta)$-কোণের কোণানুপাতগুলি 4·3 ও 4·4 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী নিম্নোক্ত নিয়মেও নির্ণয় করা যায় :

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta.$

$\cos(180^\circ - \theta) = \cos\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta.$

$\tan(180^\circ - \theta) = \tan\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cot(90^\circ - \theta) = -\tan\theta.$

$\sin(180^\circ + \theta) = \sin\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta.$

$\cos(180^\circ + \theta) = \cos\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta.$

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cot(90^\circ + \theta) = \tan\theta.$

অনুরূপভাবে, উহাদের অন্যোন্যকগুলিও পাওয়া যায়।

4·7. $(270^\circ - \theta)$-কোণের কোণানুপাত ঃ

$(270^\circ - \theta)$-কোণের কোণানুপাতগুলি পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতিক

নিয়মে নির্ণয় করা যায়। 4·3 এবং 4·6 অনুচ্ছেদ অনুসারে নিম্নোক্ত বিকল্প নিয়মেও এই অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায় :

$$\sin(270^\circ-\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}$$
$$=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}$$
$$=-\cos(90^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$
$$\tan(270^\circ-\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}$$
$$=\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$, $\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$.

4·8. $(270^\circ+\theta)$-কোণের কোণানুপাত :

$(270^\circ+\theta)$-কোণের কোণানুপাতগুলিও চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। 4·4 এবং 4·6 অনুচ্ছেদ অনুসারে নিম্নোক্ত বিকল্প নিয়মেও এই অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায় :

$$\sin(270^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta,$$
$$\cos(270^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$=-\cos(90^\circ+\theta)=\sin\theta,$$
$$\tan(270^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইলে,

$\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta)=-\sec\theta$, $\sec(270^\circ+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta$.

4·9. $(360^\circ\pm\theta)$ এবং $(n.360^\circ\pm\theta)$-কোণসমূহের কোণানুপাত :

একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা, উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OP অবস্থানে θ কোণ উৎপন্ন করিল। পরে উহা OP অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ঐ একই দিকে ঘুরিয়া আবার OP অবস্থানে আসিলে $(360^\circ+\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে। এইরূপে n-সংখ্যক বার ঘুরিয়া OP

অবস্থানে আসিলে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ হইবে $(n.\ 360^\circ+\theta)$ বা $(2n\pi+\theta)$, যেখানে n যে-কোন একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক (বিপরীত ঘূর্ণনে) পূর্ণসংখ্যা।

প্রত্যেক স্থলে ঘূর্ণায়মান সরলরেখাটির শেষ অবস্থান একই (OP) ; সুতরাং $(n.\ 360^\circ+\theta)$-কোণের এবং θ-কোণের কোণানুপাতগুলি চিহ্নসমেত একই হইবে।

অনুরূপভাবে, $(n.\ 360^\circ-\theta)$-কোণের এবং $(-\theta)$-কোণের কোণানুপাতগুলি চিহ্নসমেত একই হইবে।

$\therefore$ $n=1$ হইলে, $(360^\circ\pm\theta)$-এর কোণানুপাতগুলি $(\pm\theta)$-এর কোণানুপাতগুলির পরিমাপে ও চিহ্নে সমান হইবে।

সুতরাং,
$$\sin(360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta,$$
$$\cos(360^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(360^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta.$$
$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta,\ \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta.$$

সাধারণভাবে লেখা যায়,
$$\sin(n.360^\circ\pm\theta)=\pm\sin\theta,\ \cos(n.\ 360^\circ\pm\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(n.360^\circ\pm\theta)=\pm\tan\theta.$$

অতএব, যে-কোন কোণের কোণানুপাত নির্ণয়কালে 360° (অর্থাৎ 2π)-এর প্রয়োজনমত যে-কোন গুণিতক যোগ অথবা বিয়োগ করা যায়।

টীকা ঃ এই সূত্রগুলির সাহায্যে যে-কোন কোণের কোণানুপাতকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের কোণানুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ 4·2 হইতে 4·9 পর্যন্ত অনুচ্ছেদে যে-সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গিয়াছে সেগুলি সহজে মনে রাখিবার জন্য একটি নিয়ম করা যায় ঃ

θ যদি 90° ডিগ্রীর কোন যুগ্ম গুণিতকের সহিত '+' অথবা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তাহা হইলে কোণানুপাতের আকার অপরিবর্তিত থাকিবে (অর্থাৎ সাইন সাইনই থাকিবে, কোসাইন কোসাইনই থাকিবে, ইত্যাদি) এবং θ-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে থাকে তাহা স্থির করিয়া "সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস" সূত্রের সাহায্যে কোণানুপাতের চিহ্ন নির্ণীত হইবে।

θ যদি 90° ডিগ্রীর কোন অযুগ্ম গুণিতকের সহিত '+' অথবা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তাহা হইলে কোণানুপাতের আকার পরিবর্তিত হইবে (অর্থাৎ সাইন কোসাইন হইবে, কোসাইন সাইন হইবে, ইত্যাদি) এবং θ-কে সূক্ষ্মকোণ

ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে থাকে তাহা স্থির করিয়া "সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস" সূত্রের সাহায্যে কোণানুপাতের চিহ্ন নির্ণীত হইবে।

4·10. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. 120°, 135°, 150°, 180° ও 210° কোণগুলির সাইন ও কোসাইন-এর মান নির্ণয় কর।

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[অথবা $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin 180^\circ = \sin(90^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$.

$\cos 180^\circ = \cos(90^\circ + 90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$.

[অথবা $\cos 180^\circ = \cos(180^\circ + 0^\circ) = -\cos 0^\circ = -1$]

$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

টীকা : উপরোক্ত কোণগুলি প্রথম পাদ বহির্ভূত কয়েকটি বিশিষ্ট কোণ। ইহাদের কোণানুপাতগুলির মান প্রায়ই প্রয়োজন হইবে। সেই কারণে এই মানগুলি ছাত্রদের মনে রাখিলে সুবিধা হইবে।

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(-930^\circ)$. (ii) $\cos(\frac{41}{6}\pi)$. (iii) $\tan(1575^\circ)$.

(i) $\sin(-930^\circ) = -\sin 930^\circ = -\sin(2\times 360^\circ + 210^\circ)$

$= -\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

এখানে সহজেই দেখা যায়,

$$930^\circ = 90^\circ \times 10 + 30^\circ.$$

$\because$ 10 একটি যুগ্ম সংখ্যা, $\therefore$ সাইন, সাইনই থাকিবে।

আবার, যেহেতু 930° কোণটির সীমারেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত,

সুতরাং $\sin 930^\circ$-এর মানের চিহ্ন ঋণাত্মক হইবে।

$$\therefore \sin 930^\circ = -\sin 30^\circ = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \sin(-930^\circ) = -\sin 930^\circ = -(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

(ii) $\cos(\frac{41}{6}\pi) = \cos(3\times 2\pi + \frac{5}{6}\pi) = \cos\frac{5}{6}\pi$

$$= \cos(\pi - \tfrac{1}{6}\pi) = -\cos\tfrac{1}{6}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(iii) $\tan(1575^\circ) = \tan(4\times 360^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ$

$$= \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1.$$

উদাহরণ 3. 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

(i) $\sec(-1145^\circ)$. (ii) $\cot(-1414^\circ)$.

(i) $\sec(-1145^\circ) = \sec(-3\times 360^\circ - 65^\circ) = \sec(-65^\circ)$

$$= \sec 65^\circ = \sec(90^\circ - 25^\circ) = \text{coseo } 25^\circ.$$

(ii) $\cot(-1414^\circ) = \cot(-4\times 360^\circ + 26^\circ) = \cot 26^\circ.$

উদাহরণ 4. n একটি পূর্ণসংখ্যা হইলে, $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$-এর মান কত?

যদি n একটি যুগ্ম সংখ্যা হয়, মনে কর, $n = 2m$, যেখানে m একটি পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\tfrac{1}{3}\pi\} = \sin\{2m\pi + (-1)^{2m}\tfrac{1}{3}\pi\}$$

$$= \sin(2m\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

n একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, মনে কর, $n = 2m+1$, যেখানে m একটি পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\tfrac{1}{3}\pi\} = \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}.\tfrac{1}{3}\pi\}$$

$$= \sin\{2m\pi + \pi - \tfrac{1}{3}\pi\} = \sin\{2m\pi + (\pi - \tfrac{1}{3}\pi)\}$$

$$= \sin(\pi - \tfrac{1}{3}\pi) = \sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\frac{\sin^3 405^\circ}{\cos^2 315^\circ}\cdot\frac{\tan\frac{3}{4}\pi}{\sin(-\frac{1}{4}\pi)}\cdot\frac{\sec^2 45^\circ}{\text{cosec}^2 225^\circ}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$= \frac{\{\sin(360^\circ + 45^\circ)\}^3}{\{\cos(360^\circ - 45^\circ)\}^2}\cdot\frac{\tan(\pi - \frac{1}{4}\pi)}{\sin(-\frac{1}{4}\pi)}\cdot\frac{\sec^2 45^\circ}{\{\text{cosec}(180^\circ + 45^\circ)\}^2}$$

$$=\frac{(\sin 45^\circ)^3}{(\cos 45^\circ)^2}\cdot\frac{-\tan\frac{1}{4}\pi}{-\sin\frac{1}{4}\pi}\cdot\frac{\sec^2 45^\circ}{(-\operatorname{cosec} 45^\circ)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{(\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{2})^2}=1.$$

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\tan\tfrac{3}{20}\pi\tan\tfrac{4}{20}\pi\tan\tfrac{5}{20}\pi\tan\tfrac{6}{20}\pi\tan\tfrac{7}{20}\pi=1.$$

বামপক্ষ

$=\tan\frac{3}{20}\pi\tan\frac{4}{20}\pi\tan\frac{1}{4}\pi\tan\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{20}\pi\right)\tan\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{3}{20}\pi\right)$

$=\tan\frac{3}{20}\pi\tan\frac{4}{20}\pi\,.\,1.\ \cot\frac{4}{20}\pi\cot\frac{3}{20}\pi$

$=(\tan\frac{3}{20}\pi\,.\,\cot\frac{3}{20}\pi)\,.\,(\tan\frac{4}{20}\pi\cot\frac{4}{20}\pi)$

$=1.1=1=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$-কে সমাধান করিয়া 0° এবং 360°-এর মধ্যবর্তী θ-এর সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর।

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$

অথবা, $\sqrt{3}\sin\theta=1-\cos\theta$

অথবা, $3\sin^2\theta=(1-\cos\theta)^2$, (বর্গ করিয়া)

অথবা, $3(1-\cos^2\theta)=1+\cos^2\theta-2\cos\theta$

অথবা, $3-3\cos^2\theta=1+\cos^2\theta-2\cos\theta$

অথবা, $4\cos^2\theta-2\cos\theta-2=0$

অথবা, $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

অথবা, $2\cos^2\theta-2\cos\theta+\cos\theta-1=0$

অথবা, $(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0.$

সুতরাং, $\cos\theta-1=0$, অথবা, $2\cos\theta+1=0.$

$\cos\theta-1=0$ হইলে, $\cos\theta=1=\cos 0^\circ=\cos(360^\circ+0^\circ).$

$\therefore\ \theta=0^\circ$, অথবা, $360^\circ.$

কিন্তু θ-এর মান 0° ও 360°-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

$\therefore$ θ-এর মান 0° বা 360° হইতে পারে না।

আবার, যদি $2\cos\theta+1=0$ হয়, তবে $\cos\theta=-\frac{1}{2}.$

$\cos\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া θ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় বা তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ)$

অথবা $\cos(180^\circ + 60^\circ)$.

$\therefore \quad \theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, অথবা, $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

কিন্তু $\theta = 240^\circ$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না ;

$\therefore$ θ-এর নির্ণেয় মান 120°.

উদাহরণ 8. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলি A, B, C, D হইলে, দেখাও যে, $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$.

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলি A, B, C, D বলিয়া,

$A + C = 180^\circ$ এবং $B + D = 180^\circ$.

$\therefore \quad A = 180^\circ - C$ এবং $B = 180^\circ - D$.

বামপক্ষ $= \cos(180^\circ - C) + \cos(180^\circ - D) + \cos C + \cos D$

$= -\cos C - \cos D + \cos C + \cos D = 0 =$ ডানপক্ষ।

প্রশ্নমালা IV

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(-675^\circ)$. (ii) $\cos(-1230^\circ)$. (iii) $\tan(1020^\circ)$.

(iv) $\text{cosec}(1305^\circ)$. (v) $\sec(1035^\circ)$. (vi) $\cot(\frac{5}{2}\pi - \frac{19}{3}\pi)$.

2. নিম্নের কোণানুপাতগুলিকে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণের কোণানুপাতে প্রকাশ কর :

(i) $\sin 240^\circ$. (ii) $\cos 780^\circ$. (iii) $\tan\frac{25}{4}\pi$.

3. নিম্নের কোণানুপাতগুলিকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

(i) $\sin(-1358^\circ)$. (ii) $\cos\frac{35}{9}\pi$. (iii) $\tan(-1750^\circ)$.

(iv) $\sec(1240^\circ)$. (v) $\text{cosec}(-1150^\circ)$.

4. n-কে একটি পূর্ণসংখ্যা ধরিয়া নিম্নের কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\cos(2n\pi \pm \frac{1}{4}\pi)$. (ii) $\tan(n\pi + \frac{1}{6}\pi)$.

(iii) $\cos\{n\pi + (-1)^n \frac{1}{3}\pi\}$.

5. (i) $\theta = \frac{23}{6}\pi$ হইলে, $(\sec\theta - \tan\theta)$-এর মান কত ?

(ii) $x = \frac{17}{3}\pi$ হইলে, $(\cot x - \tan x)$-এর মান নির্ণয় কর।

সরল কর (6—10) :

6. $\cos 18^\circ + \cos 162^\circ + \cos 234^\circ + \cos 306^\circ$.

7. (i) $\sin 330^\circ + \tan 45^\circ - 4 \sin^2 120^\circ + 2 \cos^2 135^\circ + \sec^2 180^\circ$.

(ii) $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \sin(-330^\circ)$.

8. $\tan 25^\circ \tan 35^\circ \tan 45^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ$.

9. $\cot(90^\circ + x) \cot x \cos(90^\circ - x) \tan(90^\circ - x)$.

10. $\dfrac{\sin(\frac{1}{2}\pi + \theta) \cos(\pi - \theta) \cot(\frac{3}{2}\pi + \theta)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) \sin(\frac{3}{2}\pi - \theta) \cot(\frac{1}{2}\pi + \theta)}$.

প্রমাণ কর (**11—16**) :

11. (i) $\dfrac{\tan 57^\circ + \cot 37^\circ}{\tan 33^\circ + \cot 53^\circ} = \tan 57^\circ \cot 37^\circ$.

(ii) $\dfrac{\tan 47^\circ + \cot 37^\circ}{\tan 43^\circ + \cot 53^\circ} = \tan 47^\circ \cot 37^\circ$.

12. $\tan 64^\circ + \tan 26^\circ = \sec 64^\circ \operatorname{cosec} 64^\circ = \sec 26^\circ \operatorname{cosec} 26^\circ$.

13. (i) $\cos n\pi = (-1)^n$;

(ii) $\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$;

(iii) $\tan(n\pi - \theta) = -\tan \theta$; n একটি অখণ্ড সংখ্যা।

14. (i) $\sin 135^\circ \cos 65^\circ + \cos 35^\circ \cos 115^\circ = 0$.

(ii) $\cos A + \sin(270^\circ + A) - \sin(270^\circ - A) + \cos(180^\circ + A) = 0$.

15. $\cot \frac{1}{16}\pi \cot \frac{3}{16}\pi \cot \frac{5}{16}\pi \cot \frac{7}{16}\pi = \cot \frac{1}{4}\pi$.

16. $\sin^2 \frac{1}{8}\pi + \sin^2 \frac{3}{8}\pi + \sin^2 \frac{5}{8}\pi + \sin^2 \frac{7}{8}\pi = 2$.

17. (i) x একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin x = \cos 30^\circ$ হইলে, x-এর মান কত ?

(ii) α একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sec \alpha = \operatorname{cosec} 60^\circ$ হইলে, α-এর মান কত ?

18. x-এর সাংখ্যমানে (numerically) 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সম্ভাব্যমান নির্ণয় কর :

(i) $\sin x = \frac{1}{2}$. (ii) $\tan x = -\sqrt{3}$. (iii) $\sec x = -\sqrt{2}$.

19. সমাধান করিয়া 0° এবং 360°-এর মধ্যবর্তী θ-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0$. (ii) $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$.

(iii) $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5.$ (iv) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0.$

(v) $\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}.$ (vi) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2.$

(vii) $4\sin\theta\cos\theta-1=2(\cos\theta-\sin\theta).$

(viii) $\tan\theta+\cot\theta=2\sec\theta.$

20. (i) $270^\circ<\theta<360^\circ$ এবং $\cos\theta=\frac{5}{13}$ হইলে, $\sin\theta$ ও $\cot\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\sin\theta=-\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক হইলে, $\tan\theta$-এর মান কত ?

(iii) $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ হইলে, $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

21. (i) $\tan\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হইলে,

$\dfrac{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\sec\theta+\tan(-\theta)}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\cot\theta=\frac{12}{5}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হইলে,

$\dfrac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$-এর মান নির্ণয় কর।

22. (i) $\sin\theta+\sin(\pi+\theta)+\sin(2\pi+\theta)+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[প্রদত্ত রাশিমালা $=\sin\theta-\sin\theta+\sin\theta-\sin\theta+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত, ইত্যাদি]

(ii) $\cos x+\cos(\pi+x)+\cos(2\pi+x)+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

23. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B, C হইলে, দেখাও যে,

(i) $\sin(B+C)-\cos A=\cos(B+C)+\sin A.$

(ii) $\sin\frac{1}{2}(B+C)=\cos\frac{1}{2}A.$

(iii) $\tan\frac{1}{2}(C-A)=\cot(\frac{1}{2}B+A).$

(iv) $\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)$

$$=\sin(\pi-A)+\sin(3\pi-B)+\sin(5\pi-C).$$

24. ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হইলে, প্রমাণ কর,

(i) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\gamma+\delta)=0.$

(ii) $\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)+\cos\frac{1}{2}(\delta+\alpha)=0.$

25. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলি A, B, C, D হইলে, দেখাও যে, $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=0.$

পঞ্চম অধ্যায়

যৌগিক কোণ

(Compound Angles)

5·1. সংজ্ঞা ঃ

দুই বা ততোধিক কোণের যোগফল বা বিয়োগফলকে **যৌগিক কোণ** বলে। উদাহরণস্বরূপ, A+B, A−B, A+B+C, ইত্যাদি কোণগুলির প্রত্যেকটিই এক একটি যৌগিক কোণ।

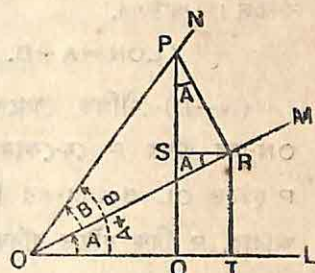
5·2. উপপাদ্য 1. A ও B **ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং** $(A+B)<90^\circ$ **হইলে,**

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

মনে কর, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা, উহার প্রথম অবস্থান OL হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান ∠LOM উৎপন্ন করিল। পরে উহা একই দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান ∠MON উৎপন্ন করিল।

অতএব, ∠LON=A+B.

(A+B)-যৌগিক-কোণের সীমারেখা ON-এর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে OL ও OM-এর উপর যথাক্রমে PQ এবং PR লম্ব অঙ্কিত করা হইল। আবার, R বিন্দু হইতে PQ ও OL-এর উপর যথাক্রমে RS এবং RT লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

RS ও LO একই সরলরেখা PQ-এর উপর লম্ব বলিয়া RS ∥ LO.

∴ A=∠LOR=একান্তর ∠ORS=90°−∠PRS=∠SPR.

এক্ষণে, POQ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin(A+B)=\sin\angle QOP=\frac{PQ}{OP}=\frac{QS+PS}{OP}=\frac{RT+PS}{OP}$$

$$=\frac{RT}{OP}+\frac{PS}{OP}=\frac{RT}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{PS}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\sin A.\cos B+\cos\angle SPR.\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B. \quad\cdots\quad (1)$$

পুনরায়, $\cos (A+B)=\cos \angle QOP=\frac{OQ}{OP}=\frac{OT-QT}{OP}$

$$=\frac{OT-SR}{OP}=\frac{OT}{OP}-\frac{SR}{OP}=\frac{OT}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{SR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

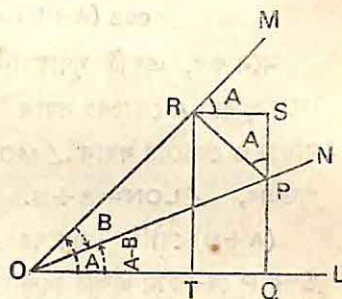
$$=\cos A.\cos B-\sin \angle SPR.\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B. \qquad \cdots \qquad (2)$$

উপপাদ্য 2. A ও B **ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং** $A>B$ **হইলে,**
$\sin (A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$,
$\cos (A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

মনে কর, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা, উহার প্রথম অবস্থান OL হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান $\angle LOM$ উৎপন্ন করিল। পরে উহা ঋণাত্মক দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান $\angle MON$ উৎপন্ন করিল। অতএব,

$$\angle LON=A-B.$$

(A − B)-যৌগিক কোণের সীমারেখা ON-এর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে OL ও OM-এর উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব অঙ্কিত করা হইল। আবার, R বিন্দু হইতে বর্ধিত QP ও OL-এর উপর যথাক্রমে RS এবং RT লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

OQ ও RS, একই সরলরেখা SQ-এর উপর লম্ব বলিয়া, RS ∥ OQ.

$\therefore A=\angle LOR=$ অনুরূপ $\angle MRS=90^\circ-\angle PRS=\angle SPR$.

এক্ষণে, POQ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin (A-B)=\sin \angle QOP=\frac{PQ}{OP}=\frac{SQ-PS}{OP}=\frac{RT-PS}{OP}$$

$$=\frac{RT}{OP}-\frac{PS}{OP}=\frac{RT}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{PS}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\sin A.\cos B-\cos \angle SPR.\sin B$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B. \qquad \cdots \qquad (3)$$

পুনরায়, $\cos (A-B)=\cos \angle QOP=\frac{OQ}{OP}=\frac{OT+TQ}{OP}$

$$=\frac{OT+RS}{OP}=\frac{OT}{OP}+\frac{RS}{OP}=\frac{OT}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RS}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\cos A.\cos B+\sin \angle SPR.\sin B$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B. \qquad \dots \quad (4)$$

টীকা 1. উপপাদ্য 1-এর সূত্র দুইটিকে sine ও cosine-এর যোগ-সূত্র (addition formulae) এবং উপপাদ্য 2-এর সূত্র দুইটিকে sine ও cosine-এর বিয়োগ-সূত্র (subtraction formulae) বলা হয়।

টীকা 2. A ও B দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ না হইয়া যে-কোন কোণ হইলেও উপরোক্ত সূত্রগুলি প্রমাণ করা যায়। প্রমাণকালে A ও B-এর ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের প্রমাণিত (1), (2), (3), (4) সূত্র চারিটি ধরিয়া লওয়া হইবে।

A ও B-এর মান যাহাই হউক না কেন A′ ও B′ কোণ দুইটি এরূপ ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ লওয়া হইল, যাহাতে

$A=m.\,90^\circ+A'$ এবং $B=n.\,90^\circ+B'$,

যেখানে m ও n দুইটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং $\cos (A+B)=\cos \{(m+n)\,90^\circ+A'+B'\}$.

(i) m ও n উভয়েই যুগ্ম হইলে,

$$\cos (A+B)=(-1)^{\frac{m+n}{2}}\cos (A'+B')$$

$$=(-1)^{\frac{m+n}{2}}(\cos A'\cos B'-\sin A'\sin B').$$

এক্ষণে $\cos A=(-1)^{\frac{m}{2}}\cos A'$ এবং $\sin A=(-1)^{\frac{m}{2}}\sin A'$;

$\cos B=(-1)^{\frac{n}{2}}\cos B'$ এবং $\sin B=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin B'$.

$\therefore\ \cos (A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

(ii) m ও n উভয়েই অযুগ্ম হইলে,

$$\cos A=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos (90^\circ+A')=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\sin A',$$

$$\sin A=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin (90^\circ+A')=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos A'.$$

B কোণের জন্যও অনুরূপ সূত্র প্রয়োগ করিলে এবং $\cos A'$, $\cos B'$, $\sin A'$, $\sin B'$-এর মানগুলি বসাইলে সহজেই $\cos(A+B)$-এর সূত্র পাওয়া যায়।

(iii) m অযুগ্ম এবং n যুগ্ম হইলে,

$$\cos(A+B)=(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}\cos(90^\circ+A'+B')$$

$$=(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}\sin(A'+B')$$

$$=(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}(\sin A'\cos B'+\cos A'\sin B').$$

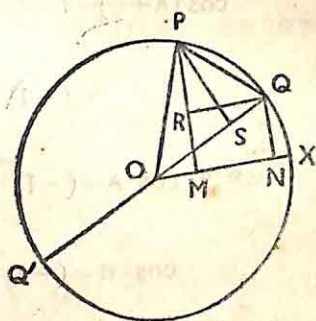
এক্ষণে $\cos A=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\sin A'$; $\cos B=(-1)^{\frac{n}{2}}\cos B'$,

$$\sin A=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos A',\ \sin B=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin B'.$$

এ সকল মান বসাইয়া $\cos(A+B)$-এর সূত্র পাওয়া যাইবে।

যৌগিক কোণের অপর সূত্রগুলিও অনুরূপভাবে ব্যাপকতা লাভ করিবে।

5.3. যৌগিক কোণ সূত্রের সাধারণ প্রমাণঃ

মনে কর, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে OP ও OQ ব্যাসার্ধদ্বয় নির্দিষ্ট রেখা OX-এর সহিত যথাক্রমে A ও B কোণ করিয়াছে। PQ যুক্ত কর এবং P ও Q হইতে OX- এর উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব অঙ্কন কর। P হইতে ব্যাস QQ′-এর উপর PS লম্ব এবং Q হইতে OX-এর সমান্তরাল QR রেখা অঙ্কন কর।

$\therefore\ OP=OQ=OX.$

এক্ষণে, $PQ^2=QR^2+RP^2=MN^2+PR^2$

$$=(ON-OM)^2+(PM-QN)^2$$
$$=(OQ\cos B-OP\cos A)^2+(OP\sin A-OQ\sin B)^2$$
$$=OX^2\{(\cos B-\cos A)^2+(\sin A-\sin B)^2\}$$
$$=2OX^2(1-\cos A\cos B-\sin A\sin B).$$

আবার $PQ^2 = QS.\ QQ' = 2OX\ (OQ - OS)$

$= 2OX\{OX - OP\cos(A-B)\}$

$= 2OX^2\{1 - \cos(A-B)\}$.

$\therefore\ \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$.

ইহাই উপরোক্ত (4) সূত্র।

B-এর স্থলে $-B$ বসাইলে (2) সূত্র, B-এর স্থলে $90^\circ - B$ বসাইলে (1) সূত্র, এবং B-এর স্থলে $90^\circ + B$ বসাইলে (3) সূত্র পাওয়া যাইবে।

অতএব, উপরোক্ত সূত্রগুলি সম্পূর্ণ ব্যাপক।

5·4. প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

(*a*) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$.

$\sin(A+B)\sin(A-B)$

$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$

$= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A(1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A)\sin^2 B$

$= \sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A - \sin^2 B$

$= (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \cos^2 A$.

(*b*) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$.

$\cos(A+B)\cos(A-B)$

$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$

$= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B$

$= \cos^2 A(1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A)\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \cos^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \sin^2 B$

$= (1 - \sin^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \sin^2 A$.

(*c*) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$.

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}.$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

(*d*) **tan** $(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}.$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\tan(A-B)=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

(*e*) **cot** $(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}.$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(*f*) **cot** $(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$

$$\cot(A-B)=\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}.$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

(*g*) $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$

$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C$

$-\tan A\tan B\tan C).$

$\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B$
$-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$
$-\sin A\sin B\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C).$

(*h*) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$
$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C$
$-\tan C\tan A-\tan A\tan B).$

$\cos(A+B+C)=\cos\{A+(B+C)\}$

$=\cos A\cos(B+C)-\sin A\sin(B+C)$

$=\cos A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$
$-\sin A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A$
$-\tan A\tan B).$

(*i*) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.$

$\tan(A+B+C)=\tan\{A+(B+C)\}$

$$=\frac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}=\frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A.\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.$$

5·5. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\tan 75^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ এবং $\tan 15^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ+30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ-30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

টীকা ঃ $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ আকারে লিখিলেও একই মান পাওয়া যাইবে।

আবার, $\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ$

এবং $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$, হইতেও একই মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ 2. A, B সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{5}{13}$ হইলে, $\sin(A+B)$ এবং $\sec(A-B)$-এর মান নির্ণয় কর।

A ও B সূক্ষ্মকোণ বলিয়া, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

এবং $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

$$\therefore\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{20+36}{65}=\frac{56}{65}$$

এবং $\sec(A-B)=\dfrac{1}{\cos(A-B)}=\dfrac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$$=\frac{1}{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}}=\frac{65}{15+48}=\frac{65}{63}.$$

টীকা: A, B সূক্ষ্মকোণ বলা থাকিলে উহাদের sine ও cosine-কে ধনাত্মক লওয়া হয়। যদি কিছুই উল্লেখ না থাকে, সেক্ষেত্রে A ও B-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া উহাদের sine ও cosine-কে ধনাত্মক লওয়া হয়।

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর:

$\cos 41°\,41'\cos 18°19'-\cos 48°19'\cos 71°41'=\frac{1}{2}$.

বামপক্ষ $=\cos 41°\,41'\cos 18°19'-$

$$\sin(90°-48°19')\sin(90°-71°41')$$

$$=\cos 41°41'\cos 18°19'-\sin 41°41'\sin 18°19'$$

$$=\cos(41°41'+18°19')=\cos 60°=\tfrac{1}{2}=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

$\sin 3\theta\cos 2\theta+\cos 3\theta\sin 2\theta=\sin 6\theta\cos\theta-\cos 6\theta\sin\theta$.

বামপক্ষ $=\sin(3\theta+2\theta)=\sin 5\theta=\sin(6\theta-\theta)$

$=\sin 6\theta\cos\theta-\cos 6\theta\sin\theta=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর: $\cot A-\cot 2A=\operatorname{cosec} 2A$.

বামপক্ষ $=\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\cos 2A}{\sin 2A}=\dfrac{\sin 2A\cos A-\cos 2A\sin A}{\sin A\sin 2A}$

$$=\frac{\sin(2A-A)}{\sin A\sin 2A}=\frac{\sin A}{\sin A\sin 2A}$$

$$=\frac{1}{\sin 2A}=\operatorname{cosec} 2A=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C \sin A}+\frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B}=0.$$

বামপক্ষ $=\dfrac{\sin B \cos C-\cos B \sin C}{\sin B \sin C}$

$$+\frac{\sin C \cos A-\cos C \sin A}{\sin C \sin A}+\frac{\sin A \cos B-\cos A \sin B}{\sin A \sin B}$$

$$=\frac{\sin B \cos C}{\sin B \sin C}-\frac{\cos B \sin C}{\sin B \sin C}+\frac{\sin C \cos A}{\sin C \sin A}-\frac{\cos C \sin A}{\sin C \sin A}$$

$$+\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B}-\frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}$$

$=\cot C-\cot B+\cot A-\cot C+\cot B-\cot A$

$=0=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $\tan(45^\circ-\theta)\tan(45^\circ+\theta)=1.$

বামপক্ষ $=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan\theta}{1+\tan 45^\circ \tan\theta}\times\dfrac{\tan 45^\circ+\tan\theta}{1-\tan 45^\circ\tan\theta}$

$=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\times\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=1=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 8. দেখাও যে, $\dfrac{\cos 5^\circ+\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ-\sin 5^\circ}=\tan 50^\circ.$

বামপক্ষের লব ও হরকে $\cos 5^\circ$ দ্বারা ভাগ করিলে,

বামপক্ষ $=\dfrac{1+\tan 5^\circ}{1-\tan 5^\circ}=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 5^\circ}{1-\tan 45^\circ.\tan 5^\circ}$

$=\tan(45^\circ+5^\circ)=\tan 50^\circ=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 9. দেখাও যে,

$\tan 22^\circ+\tan 23^\circ+\tan 22^\circ\tan 23^\circ=1.$

এস্থলে, $1=\tan 45^\circ=(\tan 22^\circ+23^\circ)$

$$=\frac{\tan 22^\circ+\tan 23^\circ}{1-\tan 22^\circ\tan 23^\circ}$$

অথবা, $\tan 22^\circ+\tan 23^\circ=1-\tan 22^\circ\tan 23^\circ$

অথবা, $\tan 22^\circ+\tan 23^\circ+\tan 22^\circ\tan 23^\circ=1.$

উদাহরণ 10. $A+B+C=180^\circ$ এবং $\cos A=\cos B \cos C$ হইলে, দেখাও যে, $\tan A=\tan B+\tan C$.

$A+B+C=180^\circ$, সুতরাং $A=180^\circ-(B+C)$.

$$\therefore \quad \text{বামপক্ষ}=\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin\{180^\circ-(B+C)\}}{\cos B \cos C}$$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\sin B\cos C}{\cos B\cos C}+\frac{\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$$

$$=\tan B+\tan C=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 11. $\tan\beta=\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha.$$

$$\text{বামপক্ষ}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}{1+\tan\alpha.\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}=\frac{\tan\alpha\left\{1-\dfrac{n\cos^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right\}}{1+\dfrac{n\sin^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\tan\alpha(1-n\sin^2\alpha-n\cos^2\alpha)}{1-n\sin^2\alpha+n\sin^2\alpha}$$

$$=(1-n)\tan\alpha=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 12. একটি কোণ θ-কে α ও β দুইভাগে ভাগ করা হইল, যাহাতে $\tan\alpha:\tan\beta=x:y$ হয়। প্রমাণ কর যে,

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{x+y}\sin\theta.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{x}{y}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা,

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\dfrac{x-y}{x+y}\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$

$[\because\ \alpha+\beta=\theta]$.

প্রশ্নমালা V

1. (i) $\cot(-15^\circ)$ এবং $\operatorname{cosec} 75^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$ এবং $\tan 105^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

2. (i) A, B সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{8}{17}$ হইলে, $\sin(A+B)$ এবং $\tan(A-B)$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\sin x=\frac{5}{13}$ এবং $\sin y=\frac{15}{17}$ হইলে, $\cos(x-y)$ এবং $\cot(x+y)$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $\sec\alpha=\frac{5}{4}$ এবং $\operatorname{cosec}\beta=\frac{13}{12}$ হইলে, দেখাও যে, $\sec(\alpha-\beta)=\frac{65}{56}$ এবং $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{65}{63}$.

প্রমাণ কর (3-21) :

3. (i) $\sin 40^\circ 40' \cos 19^\circ 20' + \sin 49^\circ 20' \cos 70^\circ 40' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $\sin 48^\circ 30' \sin 3^\circ 30' + \sin 86^\circ 30' \sin 41^\circ 30' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. (i) $\cos 3\theta \cos 4\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta$

$=\cos 12\theta \cos 5\theta + \sin 12\theta \sin 5\theta$.

(ii) $\sin(k+1)x \cos(k-1)x - \cos(k+1)x \sin(k-1)x$

$=\sin 3x \cos x - \cos 3x \cos x$.

(iii) $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\beta \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\beta \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

5. (i) $\sin(60^\circ - A)\cos(30^\circ - B) + \cos(60^\circ - A)\sin(30^\circ - B)$

$=\cos(A+B)$.

(ii) $\dfrac{\tan(A+B)-\tan B}{1+\tan(A+B)\tan B}=\tan A$.

6. $\cot 2\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$.

7. $1+\cot A \cot 2A = \cot A \operatorname{cosec} 2A$.

8. (i) $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A)$

$+\sin C \sin(A-B)=0$.

(ii) $\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)$
$+\sin(A+B)\sin(A-B)=0.$

9. $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0.$

10. $\tan\theta\tan(\theta+60^\circ)+\tan\theta\tan(\theta-60^\circ)$
$+\tan(\theta+60^\circ)\tan(\theta-60^\circ)=-3.$

11. $\cot(\frac{1}{4}\pi+A)\cot(\frac{1}{4}\pi-A)=1.$

12. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}.$

13. (i) $\dfrac{\cos 7^\circ+\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 7^\circ}=\tan 52^\circ.$

(ii) $\dfrac{\cos 8^\circ-\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ+\sin 8^\circ}=\cot 53^\circ.$

14. (i) $\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1.$

(ii) $\tan 67^\circ-\tan 22^\circ-\tan 67^\circ\tan 22^\circ=1.$

15. $\dfrac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B)=\dfrac{\sin A}{\sin B}.$

16. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$

17. $\tan(A+B).\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$

18. $\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos^2 A\cos^2 B}=\tan^2 A-\tan^2 B.$

19. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}.$

20. $\sec(x-y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1+\tan x\tan y}.$

21. $\dfrac{1}{\tan\alpha+\tan\beta}-\dfrac{1}{\cot\alpha+\cot\beta}=\cot(\alpha+\beta).$

22. (i) $\sin(A-B+C)$, $\cos(A+B-C)$ এবং $\tan(A-B-C)$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(ii) $\cot(A+B+C)$-কে $\cot A$, $\cot B$ ও $\cot C$-এর মাধ্যমে বিস্তৃত কর।

23. $A+B+C=180^\circ$ এবং $\cos A=\cos B \cos C$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cot B \cot C=\tfrac{1}{2}.$$

24. $\sin \alpha \sin \beta-\cos \alpha \cos \beta+1=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$1+\cot \alpha \tan \beta=0.$$

25. (i) $\alpha+\beta=45^\circ$ এবং $\tan \alpha=k$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan \beta=\frac{1-k}{1+k}.$$

(ii) $A+B=45^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(1+\tan A)(1+\tan B)=2.$$

ইহা হইতে দেখাও যে, $\tan 22\tfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}-1.$

(iii) $A+B=225^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{\cot A}{1+\cot A}\cdot\frac{\cot B}{1+\cot B}=\frac{1}{2}.$$

(iv) $A+B=90^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\tan A+\cos A \sec B \sec C=\tan B+\cos B \sec C \sec A$$
$$=\tan C+\cos C \sec A \sec B.$$

26. (i) $a \cos (x+y)=b \cos (x-y)$ হইলে, দেখাও যে,

$$(a+b) \tan x=(a-b) \cot y.$$

(ii) $\sin (\alpha+\beta)=n \sin (\alpha-\beta)$ হইলে, দেখাও যে,

$$(n+1) \cot \alpha=(n-1) \cot \beta.$$

(iii) $\tan \theta=\dfrac{a \sin \alpha+b \sin \beta}{a \cos \alpha+b \cos \beta}$ হইলে, দেখাও যে,

$$a \sin (\theta-\alpha)+b \sin (\theta-\beta)=0.$$

27. (i) $\tan \beta=\dfrac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\alpha+\gamma)}$ হইলে, দেখাও যে,

$\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$ বিপরীত প্রগতি (H. P.)-তে আছে।

(ii) $\tan \alpha=\dfrac{a \sin \beta}{1-a \cos \beta}$ এবং $\tan \beta=\dfrac{b \sin \alpha}{1-b \cos \alpha}$ হইলে,

দেখাও যে, $$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}=\frac{a}{b}.$$

(iii) $\cot\theta=\cos(\alpha+\beta)$ এবং $\cot\phi=\cos(\alpha-\beta)$ হইলে,

দেখাও যে, $\tan(\theta-\phi)=\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$.

(iv) $\sin\alpha=\text{A}\sin(\alpha+\beta)$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-\text{A}}.$$

28. একটি কোণ θ-কে α ও β দুই ভাগে ভাগ করা হইল, যাহাতে $\tan\alpha=k\tan\beta$ এবং $\alpha-\beta=\phi$ হয়। প্রমাণ কর যে,

$$\sin\phi=\frac{k-1}{k+1}\sin\theta.$$

29. $\dfrac{\tan(\text{A}-\text{B})}{\tan\text{A}}+\dfrac{\sin^2\text{C}}{\sin^2\text{A}}=1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan\text{A}\tan\text{B}=\tan^2\text{C}.$$

30. $\dfrac{a\cos\text{A}\sec\text{B}-x}{a\sin(\text{A}-\text{B})}=\dfrac{y-b\sin\text{A}\sec\text{B}}{b\cos(\text{A}+\text{B})}=\tan\text{B}$ হইলে,

প্রমাণ কর, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

31. $\cos(x-y)=-1$ হইলে, দেখাও যে,

$\sin x+\sin y=0$ এবং $\cos x+\cos y=0$.

32. $\cos(\text{B}-\text{C})+\cos(\text{C}-\text{A})+\cos(\text{A}-\text{B})=-\frac{3}{2}$ হইলে, দেখাও যে, $\cos\text{A}+\cos\text{B}+\cos\text{C}=0$ এবং $\sin\text{A}+\sin\text{B}+\sin\text{C}=0$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

গুণফল ও যোগফলের রূপান্তর

(Transformation of Products and Sums)

6·1. গুণফলকে যোগফল অথবা বিয়োগফলে রূপান্তর :

পূর্ব অধ্যায়ে প্রাপ্ত সূত্র হইতে,

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B)$ ... (1)

$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B)$ ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করিলে,

$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$ ... (I)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে,

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$ ... (II)

পুনরায়, $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B)$ ... (3)

$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B)$ ... (4)

(3) ও (4) যোগ করিলে,

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$ ... (III)

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিলে,

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$ ... (IV)

(I), (II), (III) ও (IV)-এ দুইটি sine বা cosine-এর গুণফলকে দুইটি sine বা cosine-এর যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা হইয়াছে।

উপরোক্ত চারিটি সূত্র নিম্নে একত্রে সন্নিবেশিত করা হইল :

$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$ ... (I)

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$ ... (II)

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$ ... (III)

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$ ... (IV)

6·2. যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তর ঃ

পূর্ব অনুচ্ছেদের সূত্রগুলিতে, মনে কর, $A+B=C$ এবং $A-B=D$;

তাহা হইলে $A=\frac{C+D}{2}$ এবং $B=\frac{C-D}{2}$.

সুতরাং পূর্ব অনুচ্ছেদের (I), (II), (III) ও (IV) হইতে,

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$$

শেষোক্ত সূত্রটির জন্য $(-\sin B)$ কে $\sin(-B)=\sin\frac{D-C}{2}$ লেখা হইয়াছে।

উপরোক্ত সূত্রগুলি দুইটি কোণের sine অথবা cosine-এর যোগফল অথবা বিয়োগফলকে উহাদের গুণফলে রূপান্তরিত করে।

টীকা ঃ উপরোক্ত সূত্রগুলিকে নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে মনে রাখা যায় ঃ

(i) sine + sine = 2 sin ($\frac{1}{2}$ যোগফল) cos ($\frac{1}{2}$ বিয়োগফল)

(ii) sine − sine = 2 cos ($\frac{1}{2}$ যোগফল) sin ($\frac{1}{2}$ বিয়োগফল)

(iii) cosine + cosine = 2 cos ($\frac{1}{2}$ যোগফল) cos ($\frac{1}{2}$ বিয়োগফল)

(iv) cosine − cosine = 2 sin ($\frac{1}{2}$ যোগফল) sin ($\frac{1}{2}$ বিপরীত বিয়োগফল)।

6·3. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর : $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}=\text{ডানপক্ষ}।$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\sin 65^\circ + \cos 65^\circ = \sqrt{2} \cos 20^\circ$.

বামপক্ষ $= \sin 65^\circ + \sin (90^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ + \sin 25^\circ$

$$= 2 \sin \frac{65^\circ + 25^\circ}{2} \cos \frac{65^\circ - 25^\circ}{2}$$

$$= 2 \sin 45^\circ \cos 20^\circ = 2 . \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 20^\circ$$

$= \sqrt{2} \cos 20^\circ =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$.

বামপক্ষ $= (\cos 20^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 140^\circ$

$$= 2 \cos \frac{100^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{100^\circ - 20^\circ}{2} + \cos (180^\circ - 40^\circ)$$

$= 2 \cos 60^\circ \cos 40^\circ - \cos 40^\circ$

$= 2 \times \frac{1}{2} \cos 40^\circ - \cos 40^\circ = \cos 40^\circ - \cos 40^\circ = 0 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}(2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ) . \frac{\sqrt{3}}{2} . \sin 80^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\cos (40^\circ - 20^\circ) - \cos (40^\circ + 20^\circ)\} \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \tfrac{1}{2} . \sin 80^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\tfrac{1}{2}(2 \sin 80^\circ \cos 20^\circ) - \tfrac{1}{2} \sin (180^\circ - 100^\circ)\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\tfrac{1}{2} (\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - \tfrac{1}{2} \sin 100^\circ\}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 5. $4 \cos A \cos B \cos C$-কে চারিটি cosine-এর যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

$4 \cos A \cos B \cos C = 2 . (2 \cos A \cos B) \cos C$

$= 2 \{\cos (A + B) + \cos (A - B)\} \cos C$

$= 2\cos(A+B)\cos C + 2\cos(A-B)\cos C$

$= \cos(A+B+C) + \cos(A+B-C) + \cos(A-B+C) + \cos(A-B-C).$

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর :

$$\frac{\sin\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin 5\theta}{\sin\theta\cos 2\theta+\sin 2\theta\cos 5\theta}=\tan 4\theta.$$

বামপক্ষ $= \dfrac{2\sin 2\theta\sin\theta+2\sin 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 2\theta\sin\theta+2\cos 5\theta\sin 2\theta}$

$= \dfrac{\{\cos(2\theta-\theta)-\cos(2\theta+\theta)\}+\{\cos(5\theta-2\theta)-\cos(5\theta+2\theta)\}}{\{\sin(2\theta+\theta)-\sin(2\theta-\theta)\}+\{\sin(5\theta+2\theta)-\sin(5\theta-2\theta)\}}$

$= \dfrac{\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 3\theta-\cos 7\theta}{\sin 3\theta-\sin\theta+\sin 7\theta-\sin 3\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta-\cos 7\theta}{\sin 7\theta-\sin\theta} = \dfrac{2\sin\frac{\theta+7\theta}{2}\sin\frac{7\theta-\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+\theta}{2}\sin\frac{7\theta-\theta}{2}}$

$= \dfrac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} = \tan 4\theta =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর যে,

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

বামপক্ষ $= 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\cos\dfrac{A+B+2C}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}.$

$= 2\cos\dfrac{A+B}{2}\left[\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B+2C}{2}\right]$

$= 2\cos\dfrac{A+B}{2}.\ 2\cos\dfrac{\frac{1}{2}(A-B)+\frac{1}{2}(A+B+2C)}{2}\times \cos\dfrac{\frac{1}{2}(A+B+2C)-\frac{1}{2}(A-B)}{2}$

$= 4\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}$

$= 4\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+A}{2}\cos\dfrac{A+B}{2} =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 8. $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=1\frac{1}{2}$.

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$ ... (1)

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ ... (2)

(1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$$

অথবা, $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 9. $\sin x+\sin y=a$ এবং $\cos x+\cos y=b$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(x-y)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

$\sin x+\sin y=a$

$\therefore\ 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a$ ... (1)

আবার, $\cos x+\cos y=b$

$\therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=b$ ... (2)

(1) ও (2)-এর উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$4\sin^2\frac{1}{2}(x+y)\cos^2\frac{1}{2}(x-y)+4\cos^2\frac{1}{2}(x+y)\cos^2\frac{1}{2}(x-y)=a^2+b^2$$

অথবা, $4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\{\sin^2\frac{1}{2}(x+y)+\cos^2\frac{1}{2}(x+y)\}=a^2+b^2$

অথবা, $\cos^2\frac{1}{2}(x-y)=\frac{a^2+b^2}{4}$

অথবা, $\sec^2\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{4}{a^2+b^2}$

অথবা, $\tan^2\frac{1}{2}(x-y)=\sec^2\frac{1}{2}(x-y)-1$

$$=\frac{4}{a^2+b^2}-1=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\ \tan\frac{1}{2}(x-y)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

উদাহরণ 10. যদি $\sin \alpha = k \sin \beta$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$\because \quad \sin \alpha = k \sin \beta$

$\therefore \quad \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = k = \dfrac{k}{1}.$

এক্ষণে, যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা,

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{k-1}{k+1}$$

অথবা, $$\frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{k-1}{k+1}$$

অথবা, $$\cot \frac{\alpha+\beta}{2} \tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1}$$

অথবা, $$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\cot \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

উদাহরণ 11. $\cos (A+B) \sin (C+D) = \cos (A-B) \sin (C-D)$ হইলে, দেখাও যে, $\cot A \cot B \cot C = \cot D$.

$\because \quad \cos (A+B) \sin (C+D) = \cos (A-B) \sin (C-D)$

$\therefore \quad \dfrac{\sin (C+D)}{\sin (C-D)} = \dfrac{\cos (A-B)}{\cos (A+B)}.$

এক্ষণে, যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা,

$$\frac{\sin (C+D) - \sin (C-D)}{\sin (C+D) + \sin (C-D)} = \frac{\cos (A-B) - \cos (A+B)}{\cos (A-B) + \cos (A+B)}$$

অথবা, $$\frac{2 \cos C \sin D}{2 \cos C \cos D} = \frac{2 \sin A \sin B}{2 \cos A \cos B}$$

অথবা, $\cot C \tan D = \tan A \tan B$

অথবা, $$\frac{\cot C}{\cot D} = \frac{1}{\cot A \cot B}$$

অথবা, $\cot A \cot B \cot C = \cot D.$

উদাহরণ 12. প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$$

$$=2\cot^n\frac{A-B}{2},\text{ যদি } n\text{-যুগ্মসংখ্যা হয়}$$

$$=0,\text{ যদি } n\text{-অযুগ্মসংখ্যা হয়।}$$

বামপক্ষ

$$=\left(\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right)^n+\left(\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}\right)^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n.$$

n যুগ্মসংখ্যা হইলে, $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2}$.

n-অযুগ্মসংখ্যা হইলে, $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n=-\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$.

সেক্ষেত্রে, বামপক্ষ $=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n-\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n=0$.

প্রশ্নমালা VI

1. সমষ্টিরূপে বা অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$. (ii) $\sin 6\alpha\sin 3\alpha$.

(iii) $\frac{1}{2}\cos 7\beta\sin 5\beta$.

2. গুণফলরূপে প্রকাশ কর :

(i) $\cos\theta-\cos 3\theta$. (ii) $\sin 45^\circ+\cos 75^\circ$.

(iii) $\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

প্রমাণ কর **(3 – 22)** :

3. $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

6. $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\tan\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

7. $\sin 18^\circ+\cos 18^\circ=\sqrt{2}\cos 27^\circ$.

8. $4\sin 15^\circ\sin 75^\circ=\sqrt{2}(\cos 105^\circ+\cos 15^\circ)$.

9. $\dfrac{\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}=\tan 25^\circ$.

10. (i) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ=0$.

(ii) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ=0$.

11. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 10^\circ-2\sin 70^\circ=1$.

12. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=\sin 70^\circ+\sin 80^\circ$.

13. $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0$.

14. (i) $\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(60^\circ-A)=\frac{1}{4}\sin 3A$.

(ii) $\cos\theta\cos(\frac{1}{3}\pi+\theta)\cos(\frac{1}{3}\pi-\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta$.

15. (i) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{16}$.

(ii) $4\sin 23^\circ\sin 37^\circ\sin 83^\circ=\cos 21^\circ$.

16. $\sin A(\sin A+\sin 3A)-\cos A(\cos A-\cos 3A)=0$.

17. $\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\alpha)\cos(\beta-\delta)$
$+\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)=0$.

18. (i) $\dfrac{\sin A+\sin 2A+\sin 3A}{\cos A+\cos 2A+\cos 3A}=\tan 2A$.

(ii) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)}=\tan\alpha$.

19. $\dfrac{\cos 7A+\cos 3A-\cos 5A-\cos A}{\sin 7A-\sin 3A-\sin 5A+\sin A}=\cot 2A$.

20. $\dfrac{\sin\theta\sin 11\theta+\sin 3\theta\sin 7\theta}{\sin\theta\cos 11\theta+\sin 3\theta\cos 7\theta}=\tan 8\theta$.

21. (i) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

(ii) $(\sin x-\sin y)^2+(\cos x-\cos y)^2=4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)$.

22. $\cos 2A+\cos 4A+\cos 6A+\cos 8A$

$$=4\cos A\cos 2A\cos 5A.$$

23. $4\sin A\cos B\cos C$-কে চারিটি sine-এর যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

24. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C-\sin 2(A+B+C)$-কে তিনটি sine-এর গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

25. $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\tfrac{2}{3}.$$

26. $\sin x+\sin y=a$ এবং $\cos x+\cos y=b$ হইলে, দেখাও যে,

$\sin\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$ এবং $\cos\frac{1}{2}(x+y)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

27. $\cos\alpha=k\cos\beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1-k}{1+k}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

28. (i) $n\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{n-m}{n+m}\cot\alpha.$$

(ii) $A+B+C=180^\circ$ এবং $\sin(A+\frac{1}{2}C)=n\sin\frac{1}{2}C$ হইলে,

দেখাও যে, $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

29. $\cos 2A\sin 2B=\cos 2C\sin 2D$ হইলে, দেখাও যে,

$\tan(A+C)\tan(A-C)\tan(B+D)=\tan(B-D)$.

30. $\operatorname{cosec}A+\sec A=\operatorname{cosec}B+\sec B$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan A\tan B=\cot\tfrac{1}{2}(A+B).$$

31. $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$$

32. $\sin(B+C-A)$, $\sin(C+A-B)$, $\sin(A+B-C)$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

সপ্তম অধ্যায়

গুণিতক কোণ

(Multiple Angles)

7·1. A একটি কোণ হইলে 2A, 3A, 4A, ইত্যাদি কোণগুলি A-কোণের যথাক্রমে দ্বিগুণ, তিনগুণ, চারিগুণ, ইত্যাদি। সুতরাং, 2A, 3A, 4A, ইত্যাদি কোণগুলিকে A-কোণের গুণিতক কোণ বলে।

7·2. 2A-কোণের কোণানুপাত :

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

A ও B কোণের যে-কোন মানের জন্যই উপরোক্ত সূত্র দুইটি সত্য।

এখন, প্রথম সূত্রটিতে B = A বসাইলে,

$$\sin 2A=\sin A.\cos A+\cos A.\sin A=2\sin A\cos A \quad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় সূত্রটিতে B = A বসাইলে,

$$\cos 2A=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A \quad \cdots \quad (2)$$

$$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1 \quad \cdots \quad (3)$$

$$=2(1-\sin^2 A)-1=1-2\sin^2 A. \quad \cdots \quad (4)$$

পুনরায়, পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

ইহাতে B = A বসাইলে,

$$\tan 2A=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A.\tan A}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}. \quad \cdots \quad (5)$$

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

ইহাতে B = A বসাইলে,

$$\cot 2A=\frac{\cot A.\cot A-1}{\cot A+\cot A}=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}. \quad \cdots \quad (6)$$

টীকা : $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \dfrac{\sin A}{\cos A}. \cos^2 A$

$$= 2 \tan A . \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}. \cos^2 A$$

$$= \cos^2 A \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right) = \frac{1}{\sec^2 A}(1 - \tan^2 A)$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$ সূত্র হইতে,

$$1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A.$$

$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ সূত্র হইতে,

$$1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A.$$

$$\therefore \quad \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A.$$

$$1 \pm \sin 2A = \sin^2 A + \cos^2 A \pm 2 \sin A \cos A = (\sin A \pm \cos A)^2.$$

7·3. 3A-কোণের কোণানুপাত :

$$\sin 3A = \sin (2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos A . \cos A + (1 - 2 \sin^2 A) . \sin A$$

$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 2 \sin A - 2 \sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

$$\therefore \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

লক্ষ্য কর, $\cos 2A$-এর মান sine দ্বারা প্রকাশ করিয়া $\sin 3A$-এর মান sine দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে।

আবার, $\cos 3A = \cos (2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$

$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A . \sin A$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A$$

$$= 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

$$\therefore \quad \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

লক্ষ্য কর, cos 2A-এর মান cosine দ্বারা প্রকাশ করিয়া cos 3A-এর মান cosine দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে।

$$\tan 3A = \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A} = \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A) - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}}.$$

tan (A+B+C)-এর বিস্তৃতিতে B=C=A বসাইয়াও tan 3A-এর উপরোক্ত সূত্রটি পাওয়া যায়।

টীকা ঃ অনুরূপ প্রণালীতে A-কোণের অন্য যে-কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিকেও A-কোণের কোণানুপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

7·4. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $\sin A = \frac{4}{5}$ হইলে, cos 2A ও tan 2A-এর মান নির্ণয় কর।

$\because \ \sin A = \frac{4}{5}, \ \therefore \ \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$

$\therefore \ \tan A = \frac{4}{3}$, (ধনাত্মক মান)।

$\therefore \ \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$;

এবং $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{-7} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7}.$

উদাহরণ 2. $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হইলে, sin 3θ ও cot 3θ-এর মান নির্ণয় কর।

$\because \ \cos\theta = \frac{12}{13},$

$\therefore \ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$

$\therefore \ \tan\theta = \frac{5}{12}$, (ধনাত্মক মান)

$\therefore \ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3 \times \frac{5}{13} - 4(\frac{5}{13})^3$

$= \frac{15}{13} - \frac{500}{2197} = \frac{2035}{2197}$

এবং $\cot 3\theta = \frac{1}{\tan 3\theta} = \frac{1}{\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}} = \frac{1-3\tan^2\theta}{3\tan\theta - \tan^3\theta}$

$$=\frac{1-3(\frac{5}{12})^2}{3\times\frac{5}{12}-(\frac{5}{12})^3}=\frac{1-\frac{25}{48}}{\frac{5}{4}-\frac{125}{1728}}=\frac{23}{48}\times\frac{1728}{2035}=\frac{828}{2035}.$$

উদাহরণ 3. $\tan\theta=\frac{a}{b}$ হইলে, $a\sin 2\theta+b\cos 2\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

$$a\sin 2\theta+b\cos 2\theta=a\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}+b.\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{a.\frac{2a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}+\frac{b\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

$$=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}+\frac{b^3-a^2b}{a^2+b^2}=\frac{2a^2b+b^3-a^2b}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2b+b^3}{a^2+b^2}=\frac{b(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=b.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$\because\ \tan\theta=\frac{a}{b},\ \therefore\ a\cos\theta=b\sin\theta.$

$\therefore\ a\sin 2\theta+b\cos 2\theta=a.2\sin\theta\cos\theta+b(1-2\sin^2\theta)$

$=b+2\sin\theta\,(a\cos\theta-b\sin\theta)$

$=b.\ [\because\ a\cos\theta=b\sin\theta\ ]$

উদাহরণ 4. $\cos 2x=\frac{24}{25}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan x=\pm\frac{1}{7}$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{24}{25}=\cos\ 2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$$\frac{25+24}{25-24}=\frac{(1+\tan^2x)+(1-\tan^2x)}{(1+\tan^2x)-(1-\tan^2x)}$$

অথবা, $\frac{49}{1}=\frac{2}{2\tan^2x}$

অথবা, $\tan^2x=\frac{1}{49}$

$\therefore\ \tan x=\pm\frac{1}{7}.$

উদাহরণ 5. $\cos 4\theta$-কে $\cos\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$\cos 4\theta=\cos 2.(2\theta)=2\cos^2 2\theta-1=2(\cos 2\theta)^2-1$

$=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=2(4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1)-1$

$=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1.$

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cot 2\alpha=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর : $\dfrac{1+\sin 2A-\cos 2A}{1+\sin 2A+\cos 2A}=\tan A.$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(1-\cos 2A)+\sin 2A}{(1+\cos 2A)+\sin 2A}=\frac{2\sin^2A+2\sin A\cos A}{2\cos^2A+2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{2\sin A(\sin A+\cos A)}{2\cos A(\cos A+\sin A)}=\tan A=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 8. দেখাও যে,

$$\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta.$$

সূত্র সাহায্যে, $\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\dfrac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$

অথবা, $\tan 3\theta-\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta=\tan 2\theta+\tan\theta.$

$\therefore\ \tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta.$

উদাহরণ 9. দেখাও যে,

$$4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ).$$

সূত্র হইতে, $\cos(3\times 10^\circ)=4\cos^3 10^\circ-3\cos 10^\circ.$

$$\therefore\ 4\cos^3 10^\circ=\cos 30^\circ+3\cos 10^\circ \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin(3\times 20^\circ)=3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ.$$

$$\therefore\ 4\sin^3 20^\circ=3\sin 20^\circ-\sin 60^\circ \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=4\cos^3 10^\circ+4\sin^3 20^\circ$

$=(\cos 30^\circ+3\cos 10^\circ)+(3\sin 20^\circ-\sin 60^\circ)$

[(1) ও (2) হইতে]

$=\frac{1}{2}\sqrt{3}+3\cos 10^\circ+3\sin 20^\circ-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 10. দেখাও যে,

$$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta.$$

বামপক্ষ $= \cos(3\theta+2\theta) = \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta$

$$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 8\cos^5\theta - 6\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta - (3 - 4\sin^2\theta)(2\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\{3 - 4(1-\cos^2\theta)\}\{(1-\cos^2\theta)\cos\theta\}$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2(4\cos^2\theta - 1)(\cos\theta - \cos^3\theta)$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 8\cos^3\theta + 2\cos\theta + 8\cos^5\theta - 2\cos^3\theta$$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 11. প্রমাণ কর :

$$\frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1} = (2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta - 1).$$

এক্ষণে, $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 4\cos^2\theta - 1$

$$= 2(2\cos^2\theta - 1) + 1 = 2\cos 2\theta + 1 \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, $(2\cos 2\theta + 1)(2\cos 2\theta - 1) = 2\cos 2^2\theta + 1 \quad \cdots \quad (2)$

$$(2\cos 2^2\theta + 1)(2\cos 2^2\theta - 1) = 2\cos 2^3\theta + 1 \quad \cdots \quad (3)$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$(2\cos 2^{n-1}\theta + 1)(2\cos 2^{n-1}\theta - 1) = 2\cos 2^n\theta + 1 \quad \cdots \quad (N)$$

(1), (2), (3)$\cdots$(N)-কে পরস্পর গুণ করিলে,

$$(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta - 1) = 2\cos 2^n\theta + 1.$$

$$\therefore \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1} = (2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta - 1).$$

উদাহরণ 12. $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$

$\because \; 2 \tan \alpha = 3 \tan \beta, \quad \therefore \; \tan \alpha = \frac{3}{2} \tan \beta.$

বামপক্ষ $= \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha \tan\beta} = \dfrac{\frac{3}{2}\tan\beta - \tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan\beta . \tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta}=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{2(2\cos^2\beta+3\sin^2\beta)}$$

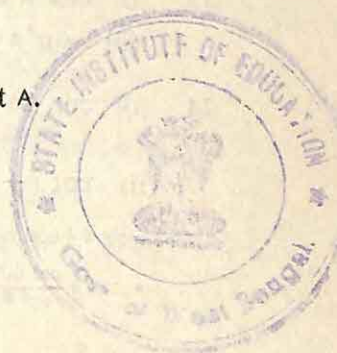
$$=\frac{\sin 2\beta}{2(1+\cos 2\beta)+3(1-\cos 2\beta)}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}=\text{ডানপক্ষ।}$$

প্রশ্নমালা VII

1. $\cos\theta=\frac{5}{13}$ হইলে, $\sin 2\theta$, $\sec 2\theta$ ও $\tan 2\theta$-এর মান নির্ণয় কর।
2. $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হইলে, $\cos 3\theta$, $\operatorname{cosec} 3\theta$ ও $\tan 3\theta$-এর মান নির্ণয় কর।
3. $\tan x=\frac{2}{3}$ হইলে, $\sin 2x+\cos 2x$-এর মান কত ?
4. $\cot A=\dfrac{a}{b}$ হইলে, $a^2 \operatorname{cosec} 2A+b^2 \sec 2A$-এর মান নির্ণয় কর।
5. $\cos 2\theta=\frac{5}{13}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\theta=\pm\frac{2}{3}$.
6. $\sin 2x=\frac{3}{5}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan x=3$ অথবা $\frac{1}{3}$.
7. $\cos 4\theta$-কে $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

প্রমাণ কর (8 – 29) :

8. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}+\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\tan A+\cot A.$
9. $\tan\theta+\cot\theta=2\operatorname{cosec} 2\theta.$
10. $\tan\alpha(1+\sec 2\alpha)=\tan 2\alpha.$
11. $\dfrac{1+\tan^2(\frac{1}{4}\pi-\theta)}{1-\tan^2(\frac{1}{4}\pi-\theta)}=\operatorname{cosec} 2\theta.$

12. $\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\sec 2A+\tan 2A.$

13. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta.$

14. (*i*) $\cos^6\theta+\sin^6\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta.$

(*ii*) $\cos^6\theta-\sin^6\theta=\frac{1}{4}\cos 2\theta\,(3+\cos^2 2\theta).$

15. $\dfrac{\cos^2 A-\cos^2 B}{\sin B\cos B-\sin A\cos A}=\tan(A+B).$

16. (i) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}=2\cos x.$

(ii) $\cos^2(\frac{1}{8}\pi-\theta)-\cos^2(\frac{1}{8}\pi+\theta)=\sin 2\theta/\sqrt{2}.$ [C.P.U.]

(iii) $\cos^2(A-120^\circ)+\cos^2 A+\cos^2(A+120^\circ)=\frac{3}{2}.$

(iv) $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A.$

17. $\dfrac{1+\sin 2A+\cos 2A}{1+\sin 2A-\cos 2A}=\cot A.$

18. (i) $\dfrac{\sin 8\theta}{\cos 4\theta}\cdot\dfrac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 8\theta}=\tan 2\theta.$

(ii) $\sin 16\theta=16\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta.$

19. $\tan(45^\circ+\theta)-\tan(45^\circ-\theta)=2\tan 2\theta.$

20. $4(\cos^3 9^\circ+\sin^3 21^\circ)=3(\cos 9^\circ+\sin 21^\circ).$

21. $\operatorname{cosec} 10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ=4.$

[বামপক্ষ $=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{4\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 2.10^\circ}.$ ইত্যাদি।]

22. $\tan 7A-\tan 4A-\tan 3A=\tan 7A\tan 4A\tan 3A.$

23. (i) $\cos^3 A\cos 3A+\sin^3 A\sin 3A=\cos^3 2A.$

(ii) $\sin^3 A\cos 3A+\cos^3 A\sin 3A=\frac{3}{4}\sin 4A.$

24. (i) $\cot 3\theta=\dfrac{\cot^3\theta-3\cot\theta}{3\cot^2\theta-1}.$

(ii) $\cot\theta+\cot(60^\circ+\theta)+\cot(120^\circ+\theta)=3\cot 3\theta.$

[বামপক্ষ $=\cot\theta+\cot(60^\circ+\theta)-\cot(60^\circ-\theta)$

$=\cot\theta+\dfrac{\cot 60^\circ\cot\theta-1}{\cot\theta+\cot 60^\circ}-\dfrac{\cot 60^\circ\cot\theta+1}{\cot A-\cot 60^\circ}$, ইত্যাদি]

25. (i) $\tan 4\theta = \frac{4 \tan \theta - 4 \tan^3\theta}{1 - 6 \tan^2\theta + \tan^4\theta}$.

(ii) $\cos 4A - \cos 4B$

$= 8 (\cos A + \cos B)(\cos A - \cos B)(\cos A + \sin B)(\cos A - \sin B)$.

26. (i) $\sin 5\theta = 16 \sin^5\theta - 20 \sin^3\theta + 5 \sin \theta$.

(ii) $\cos 6\theta = 32 \cos^6\theta - 48 \cos^4\theta + 18 \cos^2\theta - 1$.

27. (i) $\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$.

(ii) $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$.

28. (i) $\frac{2 \cos 16\theta + 1}{2 \cos \theta + 1}$

$= (2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 4\theta - 1)(2 \cos 8\theta - 1)$.

(ii) $\tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta = \cot \theta$.

[$8 \cot 8\theta = 8.\frac{1}{\tan 8\theta} = 8.\frac{1 - \tan^2 4\theta}{2 \tan 4\theta} = 4 (\cot 4\theta - \tan 4\theta)$.

$\therefore 8 \cot 8\theta + 4 \tan 4\theta = 4 \cot 4\theta = 4.\frac{1}{\tan 4\theta}$, ইত্যাদি।]

29. (i) $\frac{\tan 2^n\theta}{\tan \theta} = (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2\theta)(1 + \sec 2^3\theta) \cdots\cdots$

$(1 + \sec 2^n\theta)$.

[$\tan \theta\ (1 + \sec 2\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} . \frac{2 \cos^2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$, ইত্যাদি]

(ii) $(2^n + 1)\theta = \pi$ হইলে, দেখাও যে,

$2^n \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots\cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$.

[$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, $\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2^2} \sin 2^2\theta, \ldots\ldots$

ইত্যাদি]

30. (i) $\tan^2\alpha = 1 + 2 \tan^2\beta$ হইলে, দেখাও যে,

$\cos 2\beta = 1 + 2 \cos 2\alpha$.

(ii) $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ এবং $\tan \beta = \frac{1}{3}$ হইলে, দেখাও যে,

$\cos 2\alpha = \sin 4\beta$.

(iii) $\operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\beta + \operatorname{cosec} 2\gamma = 0$ হইলে, দেখাও যে,

$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = 0$.

[$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha$, ইত্যাদি।]

(iv) $A+B=90^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A}=\tan A-\tan B.$$

31. $2\cos\theta=a+a^{-1}$ হইলে, দেখাও যে,

$2\cos 2\theta=a^2+a^{-2}$ এবং $2\cos 3\theta=a^3+a^{-3}$.

32. (i) $3\tan\alpha=4\tan\beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{7-\cos 2\beta}.$$

(ii) α ও β সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha=\dfrac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হইলে,

দেখাও যে, $\tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$.

(iii) $\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan 2\beta=\tan^2\beta+2\tan\beta\tan 2\alpha$ হইলে, দেখাও যে, প্রতিপক্ষ $=1$, অথবা, $\tan\alpha=\pm\tan\beta$.

(iv) $\dfrac{\tan(\alpha+\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\dfrac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হইলে, দেখাও যে,

$\sin(\beta-\gamma)=0$, অথবা, $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$.

[$\dfrac{\sin(\alpha+\beta-\gamma)}{\cos(\alpha+\beta-\gamma)}\dfrac{\cos(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin(\alpha-\beta+\gamma)}=\dfrac{\sin\gamma\cos\beta}{\cos\gamma\sin\beta}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে, $\dfrac{\sin 2(\beta-\gamma)}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}$, ইত্যাদি।]

অষ্টম অধ্যায়

অংশ বা অবগুণিতক কোণ

(Sub-multiple Angles)

8·1. কোন কোণের $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ প্রভৃতি অংশসমূহকে ঐ কোণের অংশ-কোণ বলে। $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{4}\theta$ প্রভৃতি কোণ, θ-কোণের অংশ কোণ।

8·2. গুণিতক কোণগুলি সম্বন্ধে পূর্ব অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইয়াছে

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A,$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A,$$

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A\ ;\ 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A,$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\ ;\ \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}.$$

উপরোক্ত সূত্রগুলিতে $A = \frac{1}{2}\theta$ বসাইলে, অংশ কোণের নিম্নলিখিত সূত্রগুলি পাওয়া যায় :

$$\sin\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\cos\theta = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta\ ;\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}\ ;\ \cot\theta = \frac{\cot^2\frac{1}{2}\theta - 1}{2\cot\frac{1}{2}\theta}.$$

টীকা : $\sin\theta = \sin 2(\tfrac{1}{2}\theta) = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$

$$\cos\theta = \cos 2(\tfrac{1}{2}\theta) = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$$

$$1 \pm \sin\theta = (\sin\tfrac{1}{2}\theta \pm \cos\tfrac{1}{2}\theta)^2.$$

8·3. পূর্ব অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইয়াছে

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A,$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A,$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$$

উপরোক্ত সূত্রগুলিতে $A=\frac{1}{3}\theta$ বসাইলে

$\sin\theta=3\sin\frac{1}{3}\theta-4\sin^3\frac{1}{3}\theta$,

$\cos\theta=4\cos^3\frac{1}{3}\theta-3\cos\frac{1}{3}\theta$,

$$\tan\theta=\frac{3\tan\frac{1}{3}\theta-\tan^3\frac{1}{3}\theta}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\theta}.$$

8·4. $\cos\theta$-এর মাধ্যমে $\frac{1}{2}\theta$-কোণের কোণানুপাত নির্ণয়ঃ

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ সূত্র হইতে পাওয়া যায়

$$\sin\frac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)}.$$

$\cos\theta=2\cos^2\frac{1}{2}\theta-1$ সূত্র হইতে পাওয়া যায়

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)}.$$

$$\therefore\ \tan\frac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}.$$

এখন অপর কোণানুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

টীকাঃ θ-এর কোন নির্দিষ্ট মান দেওয়া না থাকিলে এবং $\cos\theta$-এর কোন নির্দিষ্ট মান দেওয়া থাকিলে, θ-এর মান একাধিক হইবে। সুতরাং, $\frac{1}{2}\theta$ যে-কোন পাদে অবস্থিত হইতে পারে অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$-এর কোণানুপাতগুলি যে-কোন চিহ্নের হইতে পারে।

$\cos\theta$-এর মানের সহিত θ-এর মান নির্দিষ্টরূপে জানা থাকিলে $\frac{1}{2}\theta$ কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা জানা যাইবে এবং 'সমস্ত, sin, tan, cos'-নিয়মানুসারে $\sin\frac{1}{2}\theta$, $\cos\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর উপযুক্ত চিহ্ন লওয়া যাইবে। ইহার পর অন্য কোণানুপাতগুলির চিহ্ন নির্ণয় করা যাইবে। সুতরাং θ-এর পরিমাণ দেওয়া থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

8·5. $\sin\theta$-এর মাধ্যমে $\sin\frac{1}{2}\theta$ ও $\cos\frac{1}{2}\theta$-এর মান নির্ণয়ঃ

$$(\cos\tfrac{1}{2}\theta+\sin\tfrac{1}{2}\theta)^2=\sin^2\tfrac{1}{2}\theta+\cos^2\tfrac{1}{2}\theta+2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta$$
$$=1+\sin\theta.$$

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}\theta+\cos\tfrac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{1+\sin\theta}\qquad\cdots\ (1)$$

আবার, $(\sin\frac{1}{2}\theta-\cos\frac{1}{2}\theta)^2$

$$=\sin^2\tfrac{1}{2}\theta+\cos^2\tfrac{1}{2}\theta-2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta=1-\sin\theta.$$

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}\theta-\cos\tfrac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{1-\sin\theta}\qquad\cdots\ (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিলে, $2 \sin \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{1+\sin\theta} \pm \sqrt{1-\sin\theta}$

$\therefore\ \sin \frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}.$

অনুরূপভাবে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে,

$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}.$

টীকা : উপরের সূত্র দুইটি হইতে দেখা যায় যে, $\sin\theta$-এর একটি মানের জন্য $\sin\frac{1}{2}\theta$ বা $\cos\frac{1}{2}\theta$-এর চারিটি মান পাওয়া যায়। কেবলমাত্র $\sin\theta$-এর মান দেওয়া থাকিলে θ-এর মান একাধিক হইবে। সুতরাং, $\frac{1}{2}\theta$ যে-কোন পাদে থাকিতে পারে।

এক্ষণে, $\sin\frac{1}{2}\theta + \cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi)$

এবং $\sin\frac{1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi).$

সুতরাং θ-এর মান দেওয়া থাকিলে $\sin(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi)$ ও $\sin(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi)$-এর চিহ্ন নির্দিষ্টভাবে জানা যায় অর্থাৎ $(\sin\frac{1}{2}\theta + \cos\frac{1}{2}\theta)$ ও $(\sin\frac{1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta)$-এর চিহ্ন নির্দিষ্টভাবে জানা যায় এবং চিহ্ন সম্বন্ধে আর কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

8·6. $\tan\theta$-এর মাধ্যমে $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর মান নির্ণয় :

সূত্র হইতে, $\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}$

অথবা, $\tan\theta - \tan\theta\tan^2\frac{1}{2}\theta = 2\tan\frac{1}{2}\theta$

অথবা, $\tan\theta\tan^2\frac{1}{2}\theta + 2\tan\frac{1}{2}\theta - \tan\theta = 0$

অথবা, $\tan^2\dfrac{\theta}{2} + 2\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta} + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta}$

অর্থাৎ, $\left(\tan\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2 = \dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}.$

$\therefore\ \tan\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{\tan\theta} = \pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$

$\therefore\ \tan\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{1}{\tan\theta} \pm \dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$

টীকা : 8·4 বা 8·5 অনুচ্ছেদের মত $\frac{1}{2}\theta$ কোণের পরিমাণ জানা থাকিলে এস্থলেও চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

8·7. θ-কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $\frac{1}{3}\theta$-কোণের কোণানুপাতের মান নির্ণয় :

$\sin\theta = 3\sin\frac{1}{3}\theta - 4\sin^3\frac{1}{3}\theta$-কে $\sin\frac{1}{3}\theta$-এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ ধরিয়া সমাধান করিলে $\sin\frac{1}{3}\theta$-এর মান $\sin\theta$-এর মাধ্যমে পাওয়া যায়।

এইরূপে, $\cos\theta = 4\cos^3\frac{1}{3}\theta - 3\cos\frac{1}{3}\theta$ হইতে $\cos\frac{1}{3}\theta$-এর মান $\cos\theta$-এর মাধ্যমে এবং $\tan\theta = \dfrac{3\tan\frac{1}{3}\theta - \tan^3\frac{1}{3}\theta}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\theta}$ হইতে $\tan\frac{1}{3}\theta$-এর মান $\tan\theta$-এর মাধ্যমে পাওয়া যায়।

8·8. 18° কোণের কোণানুপাত নির্ণয় :

মনে কর, $\alpha = 18^\circ$; তাহা হইলে $5\alpha = 90^\circ$.

$\therefore\ 2\alpha = 90^\circ - 3\alpha.$

$\therefore\ \sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha) = \cos 3\alpha$

অথবা $2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3).$

$\alpha = 18^\circ$ বলিয়া, $\cos\alpha \neq 0.$

$\therefore$ উভয় পক্ষকে $\cos\alpha$ দ্বারা ভাগ করিলে,

$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = 4\,(1-\sin^2\alpha) - 3 = 1 - 4\sin^2\alpha$

অথবা, $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0.$

$$\therefore\ \sin\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.4.(-1)}}{2.4} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}.$$

α-ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin\alpha$-ধনাত্মক হইবে। সুতরাং ঋণাত্মক চিহ্ন বাদ দিলে,

$$\sin\alpha = \sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

একই কারণে $\cos\alpha$ ধনাত্মক হইবে ;

$$\therefore\ \cos 18^\circ = +\sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

টীকা 1. 18° কোণের কোণানুপাতের মান হইতে 36°, 54°, 72° কোণের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করা যায়।

$$\cos 36^\circ = \cos 2.18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2.\tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1).$$
$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$

$\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

$\cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

18°, 36°, 54° এবং 72° কোণগুলি সকলেই সূক্ষ্মকোণ অর্থাৎ প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া সকল কোণানুপাতই ধনাত্মক।

টীকা 2. 15° ও 18° কোণের কোণানুপাতগুলি জানা থাকিলে 3° কোণের কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করা যায়।

$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) . \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}}).$

অনুরূপভাবে,

$\cos 3^\circ = \cos(18^\circ - 15^\circ)$

$= \frac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$

$3^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 30^\circ, 36^\circ$ এবং 45° কোণের কোণানুপাতগুলি জানা থাকিলে উহাদের সাহায্যে 3°-এর যে-কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিও নির্ণয় করা যায়, কারণ, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$, $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$,

$12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$; ইত্যাদি।

3°-এর কোন গুণিতক কোণ 45° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহার পূরক কোণের কোণানুপাত সমূহ হইতে কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যাইবে। যেমন,

$\sin 48^\circ = \sin(90^\circ - 42^\circ) = \cos 42^\circ = \cos(45^\circ - 3^\circ)$, ইত্যাদি।

8·9. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \tan\frac{1}{2}\theta.$

বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \tan\frac{1}{2}\theta =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\sec x+\tan x=\tan(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}x+\sin^2\frac{1}{2}x+2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x-\sin^2\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x)(\cos\frac{1}{2}x-\sin\frac{1}{2}x)}=\frac{\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x-\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{2}x}=\frac{\tan\frac{1}{4}\pi+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}x}=\tan(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 3. $\cos\alpha+\cos\beta=a$ এবং $\sin\alpha+\sin\beta=b$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=a$$

$$\therefore\ 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=a \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=b$$

$$\therefore\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=b \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিলে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$.

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

উদাহরণ 4. $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$$

$$\text{অথবা,}\quad \tan\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\theta}{2}.$$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1-\tan^2\dfrac{\phi}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\phi}{2}}=\frac{1-\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1-e-\tan^2\frac{1}{2}\theta-e\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1-e+\tan^2\frac{1}{2}\theta+e\tan^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{(1-\tan^2\frac{1}{2}\theta)-e(1+\tan^2\frac{1}{2}\theta)}{(1+\tan^2\frac{1}{2}\theta)-e(1-\tan^2\frac{1}{2}\theta)}$$

$$=\frac{\dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}-e}{1-e.\ \dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 5. $\tan\theta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর একটি মান হইবে $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta$.

$$\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)^2}$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}{(1+\cos\alpha\cos\beta)^2}.$$

$\therefore$ $\cos\theta$-এর একটি মান $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$.

$$\therefore\ \frac{\cos\theta}{1}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(1+\cos\alpha\cos\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha\cos\beta)+(\cos\alpha+\cos\beta)}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}$$

অথবা, $\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}=\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha.\ 2\sin^2\frac{1}{2}\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha.\ 2\cos^2\frac{1}{2}\beta}$

অথবা, $\tan^2\frac{1}{2}\theta=\tan^2\frac{1}{2}\alpha\tan^2\frac{1}{2}\beta.$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর একটি মান হইবে $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta.$

উদাহরণ 6. $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ হইলে, $\sin 7\frac{1}{2}^\circ$ ও $\cos 7\frac{1}{2}^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

$7\frac{1}{2}^\circ$ প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া $\sin 7\frac{1}{2}^\circ$ ও $\cos 7\frac{1}{2}^\circ$ উভয়ই ধনাত্মক।

$$\therefore\ \sin 7\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 15^\circ)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}.$$

$$\cos 7\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 15^\circ)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}.$$

উদাহরণ 7. $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ এবং $180^\circ<\theta<270^\circ$ হইলে, $\sin\frac{1}{2}\theta$ ও $\cos\frac{1}{2}\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত মান $\sin\theta=-\frac{4}{5}.$

$\therefore$ $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}.$

$\because$ $180^\circ<\theta<270^\circ$, অর্থাৎ θ-কোণ তৃতীয় পাদে অবস্থিত, সুতরাং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ $\cos\theta=-\frac{3}{5}.$

$\therefore$ $1-\cos\theta=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

অথবা, $2\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{8}{5}$

অথবা, $\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{4}{5}.$

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}\theta=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

এক্ষণে $180^\circ<\theta<270^\circ$ অথবা $90^\circ<\frac{1}{2}\theta<135^\circ$,

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$-কোণ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, সুতরাং $\sin\frac{1}{2}\theta$ ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

আবার, $1+\cos\theta = 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

অথবা, $2\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{2}{5}$

অথবা, $\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{5}$.

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

এক্ষণে $180^\circ < \theta < 270^\circ$ অথবা $90^\circ < \frac{1}{2}\theta < 135^\circ$,

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$-কোণ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, সুতরাং $\cos\frac{1}{2}\theta$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

উদাহরণ 8. দেখাও যে, $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$.

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ}$$

$$= \frac{(2\sin 6^\circ \sin 66^\circ)(2\sin 42^\circ \sin 78^\circ)}{(2\cos 6^\circ \cos 66^\circ)(2\cos 42^\circ \cos 78^\circ)}$$

$$= \frac{(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 120^\circ)}{(\cos 60^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 120^\circ)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} - \sin 18^\circ)(\cos 36^\circ + \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2} + \sin 18^\circ)(\cos 36^\circ - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1+2)}{(2+\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1-2)}$$

$$= \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{9-5}{5-1} = \frac{4}{4} = 1 = \text{ডানপক্ষ।}$$

প্রশ্নমালা VIII

প্রমাণ কর (**1—15**) :

1. $\operatorname{cosec} A + \cot A = \cot \frac{1}{2}A$.

2. $\sec\theta - \tan\theta = \tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta\right)$.

3. $\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{2}x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

4. $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)$.

5. $2\cot\theta=\cot\tfrac{1}{2}\theta-\tan\tfrac{1}{2}\theta$.

6. $\dfrac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A-\cos A}=\cot\dfrac{A}{2}$.

7. $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}=\tan\tfrac{1}{2}\theta$.

8. $(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$

$$=\cot\tfrac{1}{2}\theta-\tan\tfrac{1}{2}\theta.$$

9. $\cos^4\tfrac{1}{2}\theta=\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{2}\cos\theta+\tfrac{1}{8}\cos 2\theta$.

10. (i) $\sin 3A+\sin 2A-\sin A=4\sin A\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{3}{2}A$.

(ii) $\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(A-B)$

$+4\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}(C-A)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)=0$.

11. $\cos\tfrac{2}{15}\pi\cos\tfrac{4}{15}\pi\cos\tfrac{8}{15}\pi\cos\tfrac{14}{15}\pi=\tfrac{1}{16}$.

12. (i) $(\cos^2 66^\circ-\sin^2 6^\circ)(\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ)=\tfrac{1}{16}$.

(ii) $\cos^4\tfrac{1}{8}\pi+\cos^4\tfrac{3}{8}\pi+\cos^4\tfrac{5}{8}\pi+\cos^4\tfrac{7}{8}\pi=\tfrac{3}{2}$.

13. (i) $2\sin\tfrac{1}{16}\pi=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

(ii) $2\cos\tfrac{1}{16}\pi=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

14. $\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

[$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ=\dfrac{\sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ}=\dfrac{2\sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}{2\sin 7\frac{1}{2}^\circ\cos 7\frac{1}{2}^\circ}=\dfrac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

$=\dfrac{1-\cos(45^\circ-30^\circ)}{\sin(45^\circ-30^\circ)}=$...ইত্যাদি।]

15. $\sin x=2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$.

[$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $\sin\dfrac{x}{2}=2\sin\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^2}$,

$\sin\dfrac{x}{2^2}=2\sin\dfrac{x}{2^3}\cos\dfrac{x}{2^3}$, ...ইত্যাদি।]

16. $\sin\alpha-\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

17. $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2+e}{2-e}}\tan\frac{\beta}{2}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos\beta=\frac{2\cos\alpha+e}{2+e\cos\alpha}.$$

18. $\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

19. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=k=x\cos\beta+y\sin\beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

20. $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর একটি মান হইবে $\tan\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$.

21. $\sin 45^\circ$-এর মান হইতে $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

22. $\sin\theta=\cdot 8$ এবং $90^\circ<\theta<180^\circ$ হইলে, $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

23. α, β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ও $\cos\beta=\frac{4}{5}$ হইলে, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$-এর মান নির্ণয় কর।

24. প্রমাণ কর যে, $2\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$ এবং $270^\circ>A>180^\circ$ হইলে সঠিক চিহ্নগুলি নির্ণয় কর।

25. $A=330^\circ$ হইলে, দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$.

নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

(Trigonometrical Identities)

9·1. তিন বা ততোধিক কোণ কোন সম্বন্ধযুক্ত হইলে উহাদের কোণানুপাত সম্বলিত অনেক প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যায়। তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহাদের কোণানুপাত সম্বলিত অভেদগুলি সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। এরূপক্ষেত্রে পূরক কোণ ও সম্পূরক কোণ সম্বন্ধীয় সিদ্ধান্তগুলির ব্যবহার করা হয়।

$A+B+C=180^\circ$ হইলে, কোণত্রয়ের যে-কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টির সম্পূরক হইবে ;

অর্থাৎ $B+C=180^\circ-A$.

সুতরাং $\sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A$,

$\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$,

$\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A$, ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে, $\sin(C+A)=\sin B$, $\sin(A+B)=\sin C$,

$\cos(C+A)=-\cos B$, $\cos(A+B)=-\cos C$,

$\tan(C+A)=-\tan B$, $\tan(A+B)=-\tan C$, ইত্যাদি।

আবার, $A+B+C=180^\circ$ হইলে, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ$.

ইহা হইতে দেখা যায় যে, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$ ও $\frac{1}{2}C$ কোণত্রয়ের যে-কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টির পূরক হইবে ;

অর্থাৎ $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ-\frac{1}{2}A$.

সুতরাং $\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\sin(90^\circ-\frac{1}{2}A)=\cos\frac{1}{2}A$,

$\cos(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\cos(90^\circ-\frac{1}{2}A)=\sin\frac{1}{2}A$,

$\tan(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\tan(90^\circ-\frac{1}{2}A)=\cot\frac{1}{2}A$, ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে, $\sin(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A)=\cos\frac{1}{2}B$, $\sin(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=\cos\frac{1}{2}C$,

$\cos(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A)=\sin\frac{1}{2}B$, $\cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=\sin\frac{1}{2}C$,

$\tan(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A)=\cot\frac{1}{2}B$, $\tan(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=\cot\frac{1}{2}C$,

ইত্যাদি।

9·2. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. $A+B+C=180^\circ$ হইলে, দেখাও যে,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

বামপক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin(180^\circ-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos\{180^\circ-(A+B)\}$
$[\because A+B+C=180^\circ]$

$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C.\ 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 2. $A+B+C=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

বামপক্ষ $=(\sin A+\sin B)+\sin C$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C$

$=2\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}(A-B)$
$\quad+2\sin\{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(A+B)\}\cos\frac{1}{2}C$
$[\because \frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\pi]$

$=2\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C$

$=2\cos\frac{1}{2}C\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}$

$=2\cos\frac{1}{2}C.\ 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$

$=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sin\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}C$$
$$=1+4\sin\tfrac{1}{4}(B+C)\sin\tfrac{1}{4}(C+A)\sin\tfrac{1}{4}(A+B).$$

বামপক্ষ $=(\sin\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}B)+\sin\{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(A+B)\}$
$[\because \frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\pi]$

$=2\sin\frac{1}{4}(A+B)\cos\frac{1}{4}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$=2\sin\frac{1}{4}(A+B)\cos\frac{1}{4}(A-B)+1-2\sin^2\frac{1}{4}(A+B)$

$=1+2\sin\frac{1}{4}(A+B)\{\cos\frac{1}{4}(A-B)-\sin\frac{1}{4}(A+B)\}$

$=1+2\sin\frac{1}{4}(A+B)[\cos\frac{1}{4}(A-B)-\cos\{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}(A+B)\}]$

$$=1+2\sin\tfrac{1}{4}(A+B).\ 2\sin\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{4}(A-B+2\pi-A-B)\}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{4}(2\pi-A-B-A+B)\}$$
$$=1+4\sin\tfrac{1}{4}(A+B)\sin\tfrac{1}{4}(\pi-B)\sin\tfrac{1}{4}(\pi-A)$$
$$=1+4\sin\tfrac{1}{4}(A+B)\sin\tfrac{1}{4}(C+A)\sin\tfrac{1}{4}(B+C)$$
$$[\because A+B+C=\pi]$$
$$=1+4\sin\tfrac{1}{4}(B+C)\sin\tfrac{1}{4}(C+A)\sin\tfrac{1}{4}(A+B)=\text{ডানপক্ষ।}$$

টীকা : ডানপক্ষকে $1+4\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\sin\frac{1}{4}(\pi-B)\sin\frac{1}{4}(\pi-C)$ লেখা যায়, কারণ $A+B+C=\pi$.

উদাহরণ 4. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$$

বামপক্ষ $=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$$
$$=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)$$
$$+2\cos C.\cos\{\pi-(A+B)\}-1$$
$$[\because A+B+C=\pi]$$
$$=-2\cos C\cos(A-B)-2\cos C\cos(A+B)-1$$
$$=-2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$$
$$=-2\cos C.\ 2\cos A\cos B-1$$
$$=-4\cos A\cos B\cos C-1=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 5. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.$$

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)+1-2\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$=1+2\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}C\sin\{\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}(A+B)\}$$
$$[\because \tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\pi]$$
$$=1+2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A-B)-2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$=1+2\sin\tfrac{1}{2}C.[\cos\tfrac{1}{2}(A-B)-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)]$$
$$=1+2\sin\tfrac{1}{2}C.\ 2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$
$$=1+4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 6. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$$

$\because A+B+C=\pi, \quad \therefore B+C=\pi-A.$

$\therefore \tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$

অথবা, $\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B \tan C}=-\tan A$

অথবা, $\tan B+\tan C=-\tan A+\tan A \tan B \tan C.$

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$

বিকল্প পদ্ধতি :

$\because A+B+C=\pi,$

$\therefore \tan(A+B+C)=\tan \pi=0$

অথবা, $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A \tan B \tan C}{1-\tan B \tan C-\tan C \tan A-\tan A \tan B}=0.$

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C-\tan A \tan B \tan C=0$

অথবা, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$

উদাহরণ 7. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B, C হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan \tfrac{1}{2}B \tan \tfrac{1}{2}C+\tan \tfrac{1}{2}C \tan \tfrac{1}{2}A+\tan \tfrac{1}{2}A \tan \tfrac{1}{2}B=1.$$

যেহেতু একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B, C,

$\therefore A+B+C=\pi.$

$\therefore \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\pi$

অথবা, $\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}A$

$\therefore \tan(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\tan(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}A)=\cot \tfrac{1}{2}A$

অথবা $\dfrac{\tan \frac{1}{2}B+\tan \frac{1}{2}C}{1-\tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C}=\cot \tfrac{1}{2}A=\dfrac{1}{\tan \frac{1}{2}A}$

অথবা, $\tan \tfrac{1}{2}A \tan \tfrac{1}{2}B+\tan \tfrac{1}{2}C \tan \tfrac{1}{2}A$

$$=1-\tan \tfrac{1}{2}B \tan \tfrac{1}{2}C$$

অথবা, $\tan \tfrac{1}{2}B \tan \tfrac{1}{2}C+\tan \tfrac{1}{2}C \tan \tfrac{1}{2}A+\tan \tfrac{1}{2}A \tan \tfrac{1}{2}B=1.$

উদাহরণ 8. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A \cos B \cos C.$$

বামপক্ষ $=\tfrac{1}{2}(2\cos^2 A+2\cos^2 B)+\cos^2 C$

$=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\cos (A+B) \cos (A-B)+\cos C . \cos C$

$=1+\cos (\pi-C) \cos (A-B)+\cos C . \cos \{\pi-(A+B)\}$

$[\because \quad A+B+C=\pi]$

$=1-\cos C \cos (A-B)-\cos C \cos (A+B)$

$=1-\cos C\{\cos (A-B)+\cos (A+B)\}$

$=1-\cos C . 2 \cos A \cos B$

$=1-2 \cos A \cos B \cos C=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 9. $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ হইলে, দেখাও যে,

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma=1.$

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(2 \sin^2\alpha+2 \sin^2\beta)+\sin^2\gamma$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\cos(\alpha+\beta) \cos (\alpha-\beta)+\sin \gamma . \sin \gamma$

$=1-\cos(90^\circ-\gamma) \cos (\alpha-\beta)+\sin \gamma \sin \{90^\circ-(\alpha+\beta)\}$

$[\because \alpha+\beta+\gamma=90^\circ]$

$=1-\sin \gamma \cos (\alpha-\beta)+\sin \gamma \cos (\alpha+\beta)$

$=1-\sin \gamma\{\cos (\alpha-\beta)-\cos (\alpha+\beta)\}$

$=1-\sin \gamma . 2 \sin \alpha \sin \beta=1-2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

পক্ষান্তর করিয়া,

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma=1.$

উদাহরণ 10. দেখাও যে,

$\cot (\beta-\gamma) \cot (\gamma-\alpha)+\cot (\gamma-\alpha) \cot (\alpha-\beta)$
$+\cot (\alpha-\beta) \cot (\beta-\gamma)=1.$

মনে কর, $A=\beta-\gamma, \quad B=\gamma-\alpha, \quad C=\alpha-\beta.$

$\therefore \quad A+B+C=\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta=0$

অথবা, $A+B=-C.$

$\therefore \quad \cot (A+B)=\cot (-C)=-\cot C$

অথবা, $\dfrac{\cot A \cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$

অথবা, $\cot A \cot B-1=-\cot B \cot C-\cot C \cot A$

অথবা, $\cot A \cot B+\cot B \cot C+\cot C \cot A=1.$

A, B, C-এর মান বসাইয়া,

$$\cot(\beta-\gamma)\cot(\gamma-\alpha)+\cot(\gamma-\alpha)\cot(\alpha-\beta)+\cot(\alpha-\beta)\cot(\beta-\gamma)=1.$$

উদাহরণ 11. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ হইলে, দেখাও যে,

$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

বামপক্ষ $=(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(4\cos^3\beta-3\cos\beta)+(4\cos^3\gamma-3\cos\gamma)$

$=4(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma)-3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$

$=4\{(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma-3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)+3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\}-3.0$

$[\because \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0]$

$=4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-\cos\alpha\cos\beta-\cos\beta\cos\gamma-\cos\gamma\cos\alpha)+12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 12. $x+y+z=xyz$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

প্রদত্ত শর্তে মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$ এবং $z=\tan C.$

সুতরাং, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

অথবা, $\tan A(1-\tan B\tan C)=-(\tan B+\tan C)$

অথবা, $\tan A=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$

$=-\tan(B+C)=\tan\{n\pi-(B+C)\}.$

[$n=$ যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা]

$\therefore\ A=n\pi-B-C$

অথবা, $2A=2n\pi-2B-2C.$

$\therefore\ \tan 2A=\tan\{2n\pi-(2B+2C)\}=-\tan(2B+2C)$

$=\dfrac{-\tan 2B-\tan 2C}{1-\tan 2B\tan 2C}$

অথবা, $\tan 2A - \tan 2A \tan 2B \tan 2C = -\tan 2B - \tan 2C$

অথবা, $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$

অথবা, $\frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{2 \tan B}{1-\tan^2 B} + \frac{2 \tan C}{1-\tan^2 C}$

$$= \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} \cdot \frac{2 \tan B}{1-\tan^2 B} \cdot \frac{2 \tan C}{1-\tan^2 C}.$$

উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া এবং $\tan A, \tan B, \tan C$-এর পরিবর্তে যথাক্রমে x, y, z লিখিয়া,

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

প্রশ্নমালা IX

$A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর (**1—20**) :

1. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C.$

2. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$

3. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C + 4 \cos \frac{3}{2}A \cos \frac{3}{2}B \cos \frac{3}{2}C = 0.$

4. $\sin \frac{1}{2}A + \sin \frac{1}{2}B + \sin \frac{1}{2}C$

$$= 1 + 4 \sin \tfrac{1}{4}(\pi - A) \sin \tfrac{1}{4}(\pi - B) \sin \tfrac{1}{4}(\pi - C).$$

5. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C.$

6. $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C - 1.$

7. $\cos \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B + \cos \frac{1}{2}C$

$$= 4 \cos \tfrac{1}{4}(\pi - A) \cos \tfrac{1}{4}(\pi - B) \cos \tfrac{1}{4}(\pi - C)$$

$$= 4 \cos \tfrac{1}{4}(B + C) \cos \tfrac{1}{4}(C + A) \cos \tfrac{1}{4}(A + B).$$

8. $\cos \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B - \cos \frac{1}{2}C$

$$= 4 \cos \tfrac{1}{4}(\pi + A) \cos \tfrac{1}{4}(\pi + B) \cos \tfrac{1}{4}(\pi - C).$$

9. $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

10. (i) $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$

(ii) $\frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1.$

11. $\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$

12. $\cot A+\cot B+\cot C$
$$=\cot A \cot B \cot C\,(1+\sec A \sec B \sec C).$$

13. $(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$
$$=\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C.$$

14. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$.

15. (i) $\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A \cos B \cos C=\sin^2 C.$

(ii) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A \sin B \cos C.$

16. $\sin^2 \frac{1}{2}A+\sin^2 \frac{1}{2}B+\sin^2 \frac{1}{2}C=1-2\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

17. (i) $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$
$$=4\sin A \sin B \sin C.$$

(ii) $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$
$$=4\sin \tfrac{1}{2}(B-C) \sin \tfrac{1}{2}(C-A) \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

(iii) $\tan(B+C-A)+\tan(C+A-B)+\tan(A+B-C)$
$$=\tan(B+C-A) \tan(C+A-B) \tan(A+B-C).$$

18. (i) $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C \sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A \sin B}=2.$

(ii) $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B-\sin C}=8\cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}.$

19. $\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan A}\cdot \dfrac{\tan C+\tan A}{\tan B}\cdot \dfrac{\tan A+\tan B}{\tan C}$
$$=\sec A \sec B \sec C.$$

20. (i) $\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B-C)+\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(C-A)$
$$+\cos \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}(A-B)=\sin A+\sin B+\sin C.$$

(ii) $\cos A \sin B \sin C+\cos B \sin C \sin A$
$$+\cos C \sin A \sin B=1+\cos A \cos B \cos C.$$

21. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B, C হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(\sin B-\cos B)^2+(\sin C-\cos C)^2-(\sin A+\cos A)^2$
$$=1-4\sin A \sin B \sin C.$$

(ii) $\tan^2 B - \tan^2 C$

$$= 2 \tan A \tan B \tan C (\operatorname{cosec} 2B - \operatorname{cosec} 2C).$$

22. $A+B+C=90^\circ$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1.$

(ii) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C.$

23. $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cos B \cos C.$

(ii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4 \sin A \sin B \sin C.$

(iii) $\cos (A-B-C) + \cos (B-C-A) + \cos (C-A-B)$

$$-4 \cos A \cos B \cos C = 0.$$

24. $A+B+C=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C - 1.$

(ii) $\cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A = 1 + 2 \sin B \sin C \cos A.$

(iii) $\cot (B+C-A) \cot (C+A-B) +$

$\cot (C+A-B) \cot (A+B-C) + \cot (A+B-C) \cot (B+C-A) = 1.$

25. $A+B+C=2\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C.$

26. $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$ ($n=0$ বা কোন অখণ্ড সংখ্যা) হইলে, দেখাও যে,

(i) $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$

(ii) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$

27. একটি চতুর্ভুজের চারিটি কোণ A, B, C, D হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$$= 4 \cos \tfrac{1}{2} (A+B) \cos \tfrac{1}{2} (B+C) \cos \tfrac{1}{2} (C+A).$$

(ii) $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$$= \tan A \tan B \tan C \tan D (\cot A + \cot B + \cot C + \cot D).$$

28. $A+B+C=2S$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin (S-A) + \sin (S-B) + \sin (S-C) - \sin S$

$$= 4 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C.$$

(ii) $\sin (S-B) \sin (S-C) + \sin (S-A) \sin S = \sin B \sin C.$

(iii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1$

$$= 4 \cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C).$$

(iv) $\cos^2 S+\cos^2 (S-A)+\cos^2 (S-B)+\cos^2 (S-C)$
$=2\,(1+\cos A \cos B \cos C)$.

29. $\alpha+\beta=\gamma$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)$
$=4 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$.

(ii) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

30. প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)+\tan(\alpha-\beta)$
$=\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)\tan(\alpha-\beta)$.

(ii) $\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$
$=1+2\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta)$.

31. $\sin A+\sin B+\sin C=0$ হইলে, দেখাও যে,
$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C+12 \sin A \sin B \sin C=0$.

32. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}+\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}+\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$
$=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$.

(ii) $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$
$=4xyz$.

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান

(Trigonometrical Equations and General Values)

10·1. এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক-বিশিষ্ট সমীকরণকে **ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে।** যেমন, $\sin \theta=1$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ উহার সহিত সংশ্লিষ্ট অজ্ঞাত কোণ বা কোণসমূহের কয়েকটি নির্দিষ্ট মান দ্বারা সিদ্ধ হইবে। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, যে-সমস্ত কোণ দ্বারা উহা সিদ্ধ হয়, তাহাদের নির্ণয় করিতে হইবে।

পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে যে, কোন ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মান দেওয়া থাকিলে সংশ্লিষ্ট কোণের পরিমাপের মান একটি মাত্র না হইয়া অসংখ্য হইবে। যেমন, $\sin \theta=\frac{1}{2}$ হইলে, θ-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান হইবে 30°; সম্পূরক কোণের সাইন একই বলিয়া, $\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$; আবার, যে-সমস্ত কোণের, 30° বা 150° হইতে অন্তর 360°-এর সম্পূর্ণ গুণিতক, সেই সমস্ত কোণের সকল কোণানুপাত অভিন্ন বলিয়া, সাইনও অভিন্ন হইবে। সুতরাং $30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, \cdots\cdots; -330^\circ, -210^\circ, \cdots\cdots$ইত্যাদি প্রত্যেকটি কোণের সাইন অভিন্ন এবং $\frac{1}{2}$-এর সমান।

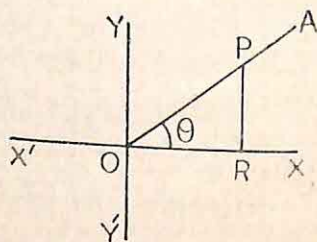
অনুরূপভাবে, $\cos \theta=\frac{1}{2}$ হইলে, θ-এর মান $\pm 60^\circ, \pm 300^\circ, \pm 420^\circ, \cdots\cdots$ ইত্যাদি হইবে; $\tan \theta=1$ হইলে, θ-এর মান $45^\circ, 225^\circ, 405^\circ, \cdots\cdots, -315^\circ, -135^\circ, \cdots\cdots$ইত্যাদি হইবে।

10·2. একটি ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত শূন্য হইলে, কোণগুলির সাধারণ মান :

XOX′ এবং YOY′ লম্ব অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু O; মনে কর $\angle XOA=\theta$; OA সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P হইতে OX-এর উপর PR লম্ব টানা হইয়াছে।

(i) সংজ্ঞানুসারে, $\sin \theta=\frac{PR}{OP}$.

$\therefore$ $\sin \theta=0$ হইলে, $PR=0$ অর্থাৎ OP সরলরেখা OX (বা OX′)-এর সহিত মিলিয়া যাইবে। অতএব θ-এর মান π-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম যে-কোন গুণিতক হইবে।

সুতরাং $\sin \theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) সংজ্ঞানুসারে, $\cos\theta=\frac{OR}{OP}$.

$\therefore$ $\cos\theta=0$ হইলে, $OR=0$

অর্থাৎ OP সরলরেখা OY (বা OY′)-এর সহিত মিলিয়া যাইবে। অতএব θ-এর মান $\frac{1}{2}\pi$-এর যে-কোন অযুগ্ম গুণিতক হইবে।

স্বতরাং $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$;

এখানে $n=0$, অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\tan\theta=0$ হইলে, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$ অর্থাৎ $\sin\theta=0$

অর্থাৎ $\theta=n\pi$; এখানে $n=0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\cot\theta=0$ হইলে, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$ অর্থাৎ $\cos\theta=0$ অর্থাৎ $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$;

এখানে $n=0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

টীকা ঃ θ-এর যে-কোন মানের জন্যই $\operatorname{cosec}\theta$ অথবা $\sec\theta$ এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। সেজন্য $\operatorname{cosec}\theta$ অথবা $\sec\theta$ কখনও শূন্য হইতে পারে না।

10·3. সমান সাইন-বিশিষ্ট কোণের সাধারণ মান ঃ

মনে কর, α একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণ এবং $\sin\alpha$ একটি প্রদত্ত রাশি-k-এর সমান (k একটি নির্দিষ্ট রাশি এবং ইহার সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নহে অর্থাৎ $|k|\leqslant 1$)। সাধারণতঃ যে-সমস্ত কোণের sine, k-এর সমান, তাহাদের ক্ষুদ্রতমটিকে α ধরা হয়।

এখন, মনে কর, অপর একটি কোণ θ-এর সাইনও k-এর সমান।

$\therefore$ $\sin\theta=k=\sin\alpha$

অথবা $\sin\theta-\sin\alpha=0$

অথবা $2\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$.

স্বতরাং $\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0$, অথবা $\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$.

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=m\pi$ $\cdots(1)$

এখানে m, শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার $\cos \frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=(2m+1)\frac{\pi}{2}$ ...(2)

(1) হইতে, $\theta-\alpha=2m\pi$ অর্থাৎ $\theta=\alpha+2m\pi$ ...(3)

(2) হইতে, $\theta+\alpha=(2m+1)\pi$ অর্থাৎ $\theta=-\alpha+(2m+1)\pi$ ...(4)

(3) ও (4)-কে একত্রিত করিলে, $\theta=\mathbf{n}\pi+(-\mathbf{1})^n\alpha$;

এখানে n, শূন্য অথবা যুগ্ম বা অযুগ্ম, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}\alpha$ হইলে, $\sin\theta=\sin\alpha$.

সুতরাং যে-সমস্ত কোণের cosecant, α কোণের cosecant-এর সমান, সে-সমস্ত কোণের সাধারণ মানও $n\pi+(-1)^n\alpha$ হইবে ; এখানে $n=0$ অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

টীকা ঃ $\sin\theta=1$ হইলে, $\sin\theta=1=\sin\frac{1}{2}\pi$

অর্থাৎ $\theta=m\pi+(-1)^m\frac{1}{2}\pi$; এখানে $m=0$ অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$m=$ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $=2n$ হইলে, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

$m=$ অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $=(2n+1)$ হইলে,

$$\theta=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$\therefore$ $\mathbf{\sin\theta=1}$ হইলে, $\theta=\mathbf{2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}}$;

এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অনুরূপভাবে, $\sin\theta=-\mathbf{1}$ হইলে, $\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

অর্থাৎ $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}$

অথবা $\theta=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{3\pi}{2}=(4n+3)\frac{\pi}{2}$.

এখানে $n=0$ অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

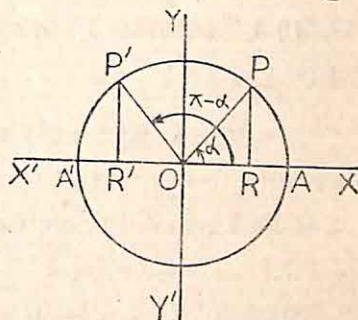
জ্যামিতিক প্রণালী ঃ

মনে কর, α এরূপ একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণ যাহার সাইন, একটি প্রদত্ত-রাশি k-এর সমান ($|k|\leqslant 1$) এবং যে-সমস্ত কোণের সাইন, k-এর সমান, তাহাদের ক্ষুদ্রতমটি হইল α.

এখন, k ধনাত্মক হইলে, α প্রথম অথবা দ্বিতীয় পাদের একটি কোণ হইবে।

XOX′ ও YOY′ লম্বঅক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু O.

α-কোণের সমান করিয়া $\angle$XOP অঙ্কন কর।

O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ OP লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; উহা যেন OX-কে A বিন্দুতে এবং OX′-কে A′ বিন্দুতে ছেদ করে। P হইতে OX-এর উপর PR লম্ব টান। OA′ হইতে OR-এর সমান করিয়া OR′ কাটিয়া লও। R′ বিন্দুতে OA′-এর উপর P′R′ লম্ব টান, উহা যেন বৃত্তটিকে P′ বিন্দুতে ছেদ করে। OP′ যুক্ত কর।

অঙ্কনানুসারে, △POR ও △P′OR′ সর্বসম।

$$\therefore \quad \angle P'OR' = \angle POR = \alpha.$$

$$\therefore \quad \angle AOP' = \pi - \alpha.$$

$$\therefore \quad \sin (\pi - \alpha) = \frac{P'R'}{OP'} = \frac{PR}{OP} = \sin \alpha.$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, α ও $\pi - \alpha$ কোণদ্বয়ের সাইন k-এর সমান ; ঐ কোণদ্বয় যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত এবং ঐ কোণদ্বয় ক্ষুদ্রতম। k ধনাত্মক হইলে, ঐ দুই পাদ ভিন্ন অন্য কোন পাদের কোণের সাইন k-এর সমান হইতে পারে না।

এখন, যে-সমস্ত কোণ α অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির সাইন $= k$.

∴ যে-সমস্ত কোণের সাইন k-এর সমান তাহাদের একটি সাধারণ মান

$$2m\pi + \alpha ; \qquad \cdots \quad (5)$$

এখানে $m = 0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, যে-সমস্ত কোণ $(\pi - \alpha)$ অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির সাইন k-এর সমান।

∴ যে-সমস্ত কোণের সাইন k-এর সমান, তাহাদের অপর একটি সাধারণ মান

$$\pi - \alpha + 2m\pi \text{ বা } (2m+1)\pi - \alpha ; \qquad \cdots \quad (6)$$

এখানে $m = 0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(5) ও (6)-কে একত্রিত করিলে, যে-সমস্ত কোণের সাইন $= k = \sin \alpha$ তাহাদের সাধারণ মান হইল $\quad n\pi + (-1)^n \alpha$;

এখানে $n = 0$ অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

k-এর মান ঋণাত্মক হইলেও, অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, যে-সমস্ত কোণের

সাইন $=k=\sin\alpha$, তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi+(-1)^n\alpha$; যেখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

10·4. সমান কোসাইন বিশিষ্ট কোণের সাধারণ মান :

মনে কর, α এরূপ একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণ, যাহার কোসাইন, একটি প্রদত্তরাশি k-এর সমান (k একটি নির্দিষ্ট রাশি এবং $|k| \leqslant 1$) এবং মনে কর, অপর একটি কোণ θ-এর কোসাইনও k-এর সমান।

$\therefore \quad \cos\theta=k=\cos\alpha$

অথবা $\cos\alpha-\cos\theta=0$

অথবা $2\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0.$

সুতরাং $\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0,$ অথবা $\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0.$

$\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=n\pi$; ... (1)

এখানে $n=$ শূন্য, অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=n\pi$ ... (2)

(1) হইতে, $\theta+\alpha=2n\pi$ অর্থাৎ $\theta=2n\pi-\alpha$ ... (3)

(2) হইতে, $\theta-\alpha=2n\pi$ অর্থাৎ $\theta=2n\pi+\alpha$ ... (4)

(3) ও (4) একত্র করিলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha$.

এখানে n, শূন্য অথবা যুগ্ম বা অযুগ্ম, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

α-ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণ হইলেও একই সমাধান পাওয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : $\sec\theta=\sec\alpha$ হইলে, $\cos\theta=\cos\alpha$ হইবে।

সুতরাং যে-সমস্ত কোণের secant, α-কোণের secant-এর সমান, সে-সমস্ত কোণের সাধারণ মানও $2n\pi\pm\alpha$ হইবে ; এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

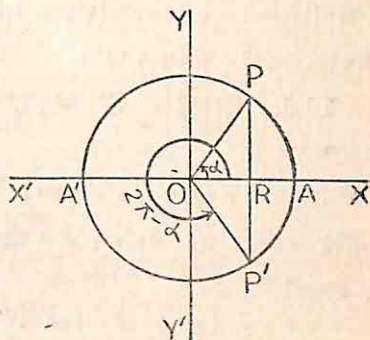
টীকা : $\cos\theta=1$ হইলে, $\cos\theta=1=\cos 0^\circ$, $\theta=2n\pi$ এবং $\cos\theta=-1$ হইলে, $\cos\theta=-1=\cos\pi$ অর্থাৎ $\theta=(2n+1)\pi$; এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

জ্যামিতিক প্রণালী :

মনে কর, α-এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার কোসাইন একটি প্রদত্ত রাশি k-এর সমান ($|k| \leqslant 1$).

এখন, k ধনাত্মক হইলে, α প্রথম অথবা চতুর্থ পাদের একটি কোণ হইবে।

XOX′ ও YOY′ লম্বঅক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু O.

α-কোণের সমান করিয়া ∠XOP অঙ্কন কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ OP লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; উহা যেন OX কে A-বিন্দুতে এবং OX′-কে A′ বিন্দুতে ছেদ করে। P হইতে OX-এর উপর PR লম্ব টান। PR-কে বর্দ্ধিত কর, যেন উহা বৃত্তটিকে P′-বিন্দুতে ছেদ করে। OP′ যুক্ত কর।

অঙ্কনানুসারে, △POR ও △P′OR সর্বসম।

$\therefore \quad \angle P'OR = \angle POR = \alpha.$

$\therefore \quad \angle AOP' = 2\pi - \alpha.$

$$\therefore \quad \cos(2\pi - \alpha) = \frac{OR}{OP'} = \frac{OR}{OP} = \cos\alpha.$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, α ও $2\pi - \alpha$ কোণদ্বয়ের কোসাইন k-এর সমান ; ঐ কোণদ্বয় যথাক্রমে প্রথম ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত এবং ঐ কোণদ্বয়ই ক্ষুদ্রতম (অর্থাৎ প্রথমপাদে অবস্থিত যে-সমস্ত কোণের কোসাইন k-এর সমান তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম হইল α এবং চতুর্থপাদে অবস্থিত যে-সমস্ত কোণের কোসাইন k-এর সমান, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম হইল $(2\pi - \alpha)$। k-ধনাত্মক হইলে, ঐ দুই পাদ ভিন্ন অন্য কোন পাদের কোণের কোসাইন k-এর সমান হইতে পারে না।

এখন, যে-সমস্ত কোণ α অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির কোসাইন k-এর সমান।

$\therefore$ যে-সমস্ত কোণের কোসাইন $=k$, তাহাদের একটি সাধারণ মান

$$2n\pi + \alpha \; ; \qquad (5)$$

এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, যে-সমস্ত কোণ $(2\pi - \alpha)$ অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির কোসাইন k-এর সমান।

$\therefore$ যে-সমস্ত কোণের কোসাইন $=k$. তাহাদের অপর একটি সাধারণ মান

$$2n\pi - \alpha \; ; \qquad \ldots \qquad (6)$$

এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(5) ও (6) একত্র করিলে, যে-সমস্ত কোণের কোসাইন $=k=\cos\alpha$, তাহাদের সাধারণ মান হইল $2n\pi\pm\alpha$; এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

k-এর মান ঋণাত্মক হইলেও, অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, যে-সমস্ত কোণের কোসাইন $=k=\cos\alpha$, তাহাদের সাধারণ মান হইল $2n\pi\pm\alpha$; এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

10·5. সমান ট্যানজেণ্ট বিশিষ্ট কোণের সাধারণ মান :

মনে কর, α এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট, একটি প্রদত্ত নির্দিষ্ট রাশি k-এর সমান ; এবং মনে কর, অপর একটি কোণ θ-এর ট্যানজেণ্টও k-এর সমান।

$\therefore\ \tan\theta=k=\tan\alpha$

অথবা $\tan\theta-\tan\alpha=0$

অথবা $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$

অথবা $\dfrac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=0$

অথবা $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$

অথবা $\sec\theta\sec\alpha\sin(\theta-\alpha)=0.$

যেহেতু $\sec\theta$ এবং $\sec\alpha$ কখনই শূন্য হইতে পারে না, সুতরাং

$$\sin(\theta-\alpha)=0.$$

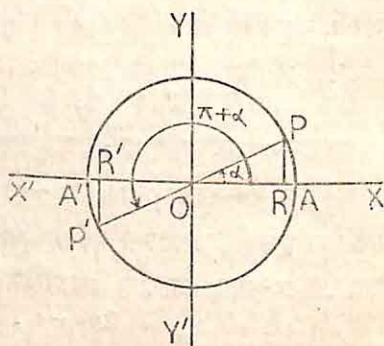
$\therefore\ \theta-\alpha=n\pi$ অর্থাৎ $\theta=n\pi+\alpha.$

এখানে n, শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

জ্যামিতিক প্রণালী :

মনে কর, α এরূপ একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণ, যাহার ট্যানজেণ্ট, একটি প্রদত্ত রাশি k-এর সমান।

α-কোণের সমান করিয়া $\angle XOP$ অঙ্কন কর।

O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ OP লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর ; উহা যেন OX-কে A বিন্দুতে এবং OX′-কে A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

PO-কে বর্ধিত কর ; যেন উহা বৃত্তটিকে P′ বিন্দুতে ছেদ করে। P ও P′ হইতে XOX′-এর উপর যথাক্রমে PR ও P′R′ লম্ব টান।

অঙ্কনানুসারে, △POR ও △P′OR′ সর্বসম।

$\therefore \quad \angle P'OR' = \angle POR = \alpha.$

$\therefore \quad \angle AOP' = \pi + \alpha.$

$$\therefore \quad \tan(\pi+\alpha) = \frac{P'R'}{OR'} = \frac{PR}{OR} = \tan\alpha.$$

সুতরাং α ও $\pi+\alpha$ কোণদ্বয়ের ট্যানজেণ্ট k-এর সমান ; ঐ কোণদ্বয় যথাক্রমে প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং ঐ কোণদ্বয়ই ক্ষুদ্রতম।

এখন, যে-সমস্ত কোণ α অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণ বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির ট্যানজেণ্ট k-এর সমান।

$\therefore$ যে-সমস্ত কোণের ট্যানজেণ্ট $=k$, তাহাদের একটি সাধারণ মান

$$2m\pi + \alpha \; ; \qquad \cdots \quad (5)$$

এখানে $m=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, যে-সমস্ত কোণ $(\pi+\alpha)$ অপেক্ষা 2π-এর কোন গুণিতক পরিমাণ বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর, তাহাদের প্রত্যেকটির ট্যানজেণ্ট k-এর সমান।

$\therefore$ যে-সমস্ত কোণের ট্যানজেণ্ট $=k$, তাহাদের অপর একটি সাধারণ মান

$$2m\pi + \pi + \alpha = (2m+1)\pi + \alpha \; ; \qquad \cdots \quad (6)$$

এখানে $m=0$ অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(5) ও (6) একত্র করিলে, যে-সমস্ত কোণের ট্যানজেণ্ট $=k=\tan\alpha$, তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi+\alpha$, যেখানে $n=0$, অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\cot\theta = \cot\alpha$ হইলে, $\tan\theta = \tan\alpha$ হইবে। সুতরাং যে-সমস্ত কোণের cotangent α-কোণের cotangent-এর সমান, সে-সমস্ত কোণের সাধারণ মানও $n\pi+\alpha$ হইবে, যেখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

টীকা ঃ $\tan\theta = 1$ হইলে, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ অর্থাৎ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

এবং $\tan\theta = -1$ হইলে, $\tan\theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

অর্থাৎ $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$;

এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

10·6. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের পর্য্যায় ধর্ম :

x-চলের অপেক্ষক $f(x)$ যদি এরূপ হয় যে, সকল মানের জন্য $f(x)=f(x+k)$, যেখানে k একটি ধ্রুবক, তাহা হইলে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে **পর্যাবৃত্ত** (Periodic) অপেক্ষক বলা হয়।

k-এর যে-নিম্নতম মানের জন্য $f(x)=f(x+k)$ হইবে তাহাকে অপেক্ষকটির **পর্যায় কাল** (Period) বলে। সুতরাং $f(x)=f(x+k)$ হইলে এবং n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $f(x)=f(x+nk)$ হইবে।

সুতরাং k ব্যবধানে x-এর দুইটি মানের মধ্যেকার সকলমানের জন্য অপেক্ষকটির মান জানিতে পারিলে x-এর সকল মানের জন্যই অপেক্ষকটির মান জানা যাইবে। এই মানগুলি জ্ঞাত মানগুলির পুনরাবৃত্তি হইবে।

এক্ষণে $\sin(2n\pi \pm \theta) = \pm \sin\theta$ এবং $\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos\theta$.

সুতরাং, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, উহাদের পর্যায় কাল 2π.

আবার $\sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin\theta$ এবং $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta$.

সুতরাং $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ অর্ধ-পর্যায় কালের ব্যবধানে সমান থাকিবে কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তিত হইবে।

$$\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan\theta.$$

সুতরাং $\tan\theta$ একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং ইহার পর্যায় কাল π.

সহজেই অনুমেয় যে, সেকান্ট ও কোসেকান্টের পর্যায় কাল 2π এবং কোট্যানজেন্টের পর্যায় কাল π.

10·7. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$. [C.P.U.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে লেখা যায়, $2\cos 2x = 1$

অথবা, $\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{1}{3}\pi$.

$\therefore\ 2x = 2n\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, অর্থাৎ, $x = n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

দ্বিতীয় পদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপেও লেখা যায়,

$2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = 1$

অথবা, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

অথবা, $\sin x = \pm\frac{1}{2} = \sin(\pm\frac{1}{6}\pi)$.

$\therefore \quad x=n\pi+(-1)^n(\pm\frac{1}{6}\pi)=n\pi\pm(-1)^n.\frac{1}{6}\pi.$

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অনুরূপভাবে, প্রদত্ত সমীকরণটিকে কোসাইনের মাধ্যমে লিখিয়াও সমাধান করা যায়।

টীকা ঃ একটি সমীকরণ অনেক সময়ই বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করা যায়। কোন কোন ক্ষেত্রে সমাধানগুলি আপাতদৃষ্টিতে বিভিন্ন হইলেও তাহারা মূলতঃ অভিন্ন। এইরূপে প্রাপ্ত মানগুলি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে কিনা তাহা ছাত্রদের উত্তমরূপে পরীক্ষা করিয়া সমাধানের সঠিকতা সম্বন্ধে নিঃসন্দেহ হওয়া উচিত। যদি কোন মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ না করে, সেই মানকে বাদ দিতে হইবে। এইরূপ মানকে (বা সমাধানকে) **বহিরাগত সমাধান** (Extraneous solution) বলে।

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\tan^2\theta=3\ \text{cosec}^2\theta-1.$

$\tan^2\theta=3\ \text{cosec}^2\theta-1$ অর্থাৎ, $3\ \text{cosec}^2\theta=\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

অথবা, $\tan^2\theta=3. \quad \therefore \quad \tan\theta=\pm\sqrt{3}=\tan(\pm\frac{1}{3}\pi).$

$\therefore \quad \theta=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$; এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\cot\theta-\tan\theta=2.$ [W.B.B.H.S.]

$\cot\theta-\tan\theta=2$

অথবা, $\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=2$

অথবা, $\dfrac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}=2$

অথবা, $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1$

অথবা, $\tan 2\theta=1=\tan\frac{1}{4}\pi.$

$\therefore \quad 2\theta=n\pi+\frac{1}{4}\pi$ অর্থাৎ $\theta=\frac{1}{8}(4n+1)\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 4. সমাধান কর :

$\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0.$ [B. U. Ent.]

এক্ষণে, $\tan x+\tan 2x+\tan(x+2x)=0$

অথবা, $(\tan x+\tan 2x)+\dfrac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=0$

অথবা, $(\tan x+\tan 2x)\left(1+\frac{1}{1-\tan x \tan 2x}\right)=0.$

সুতরাং, $\tan x+\tan 2x=0$ অথবা, $1+\frac{1}{1-\tan x \tan 2x}=0.$

$\tan x+\tan 2x=0$ হইলে, $\tan 2x=-\tan x=\tan(-x).$

$\therefore\ 2x=n\pi-x$ অথবা, $3x=n\pi$ অর্থাৎ, $x=\frac{1}{3}n\pi.$

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, $1+\frac{1}{1-\tan x \tan 2x}=0$ হইলে, $1=\frac{1}{\tan x \tan 2x-1}$

অথবা, $\tan x \tan 2x-1=1$

অথবা, $\tan x.\frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}=2$ অর্থাৎ, $\tan^2 x=1-\tan^2 x$

অথবা, $2\tan^2 x=1$

অথবা, $\tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\tan\alpha$ (মনে কর) $=\tan(\pm\alpha).$

$\therefore\ x=n\pi\pm\alpha$; এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore\ x=\frac{1}{3}n\pi$, অথবা, $n\pi\pm\alpha$;

এখানে $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $\sec\theta-1=(\sqrt{2}-1)\tan\theta.$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $(\sqrt{2}-1)\tan\theta+1=\sec\theta.$

উভয়পক্ষকে বর্গ করিলে,

$(3-2\sqrt{2})\tan^2\theta+1+2(\sqrt{2}-1)\tan\theta=\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

অথবা, $(2-2\sqrt{2})\tan^2\theta+(2\sqrt{2}-2)\tan\theta=0$

অথবা, $\tan\theta(\tan\theta-1)=0.$

$\therefore\ \tan\theta=0$ অথবা, $\tan\theta-1=0.$

$\tan\theta=0=\tan 0$ হইলে, $\theta=n\pi$

এবং $\tan\theta-1=0$ হইলে, $\tan\theta=1=\tan\frac{1}{4}\pi$

অর্থাৎ, $\theta=n\pi+\frac{1}{4}\pi.$

$\therefore\ \theta=n\pi$ বা $n\pi+\frac{1}{4}\pi$, এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $\sin 5\theta=\sin 3\theta-\sin \theta$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $(\sin 5\theta+\sin \theta)-\sin 3\theta=0$

অথবা, $2 \sin 3\theta \cos 2\theta-\sin 3\theta=0$

অথবা, $\sin 3\theta\ (2 \cos 2\theta-1)=0$.

সুতরাং $\sin 3\theta=0$, অথবা, $2 \cos 2\theta-1=0$.

$\sin 3\theta=0$ হইলে, $\sin 3\theta=0=\sin 0$

অর্থাৎ, $3\theta=n\pi$ বা, $\theta=\frac{1}{3}n\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$2 \cos 2\theta-1=0$ হইলে, $\cos 2\theta=\frac{1}{2}=\cos \frac{1}{3}\pi$

অর্থাৎ, $2\theta=2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$ অথবা, $\theta=n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore\ x=\frac{1}{3}n\pi$, অথবা, $n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 7. সমাধান কর : $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x=0$

অথবা, $2 \sin 3x \cos 2x+\sin 3x=0$

অথবা, $\sin 3x(2 \cos 2x+1)=0$.

$\therefore\ \sin 3x=0$, অথবা, $2 \cos 2x+1=0$.

$\sin 3x=0=\sin 0$ হইলে, $3x=n\pi$ অর্থাৎ, $x=\frac{1}{3}n\pi$

এবং $2 \cos 2x+1=0$ হইলে,

$$\cos 2x=-\tfrac{1}{2}=-\cos \tfrac{1}{3}\pi=\cos(\pi-\tfrac{1}{3}\pi)=\cos \tfrac{2}{3}\pi.$$

$\therefore\ 2x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$ অর্থাৎ, $x=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$.

$\therefore\ x=\frac{1}{3}n\pi$, বা, $n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 8. সমাধান কর : $\sin 2\phi=\cos 3\phi$.

এখানে, $\cos 3\phi=\sin 2\phi=\cos (\frac{1}{2}\pi-2\phi)$.

$\therefore\ 3\phi=2n\pi\pm(\frac{1}{2}\pi-2\phi)$.

প্রথমে ধনাত্মক চিহ্ন লইলে, $3\phi=2n\pi+\frac{1}{2}\pi-2\phi$

অথবা, $5\phi=(2n+\frac{1}{2})\pi$ অথবা, $\phi=\frac{1}{10}(4n+1)\pi$.

পুনরায়, ঋণাত্মক চিহ্ন লইলে, $3\phi=2n\pi-\frac{1}{2}\pi+2\phi$

অথবা, $\phi=\frac{1}{2}(4n-1)\pi$.

$\therefore\ \phi=\frac{1}{10}(4n+1)\pi$, অথবা, $\frac{1}{2}(4n-1)\pi$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 9. সমাধান কর :

$2\sin^2\theta+3\cos\theta=0,\ 0<\theta<2\pi.$ [W. B. B. H. S.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta=0$

অথবা, $2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

অথবা, $2\cos^2\theta-4\cos\theta+\cos\theta-2=0$

অথবা, $2\cos\theta(\cos\theta-2)+(\cos\theta-2)=0$

অথবা, $(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)=0$.

এক্ষণে, $\cos\theta\leq 1$, সুতরাং $(\cos\theta-2)\neq 0$. $\therefore\ 2\cos\theta+1=0$

অথবা, $\cos\theta=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{1}{3}\pi=\cos(\pi-\frac{1}{3}\pi)=\cos\frac{2}{3}\pi$.

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$; এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $\theta=\pm\frac{2}{3}\pi$; ইহার মধ্যে $-\frac{2}{3}\pi<0$.

$n=1$ হইলে, $\theta=2\pi\pm\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$; ইহার মধ্যে $\frac{8}{3}\pi>2\pi$.

$n=-1$ হইলে, $\theta=-2\pi\pm\frac{2}{3}\pi<0$.

$\therefore$ θ-এর নির্ণেয় মান $(0<\theta<2\pi)$ হইল $\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$.

উদাহরণ 10. সমাধান কর :

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=1,\ -2\pi<x<2\pi.$ [B. U. Ent.]

প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$ অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করিলে,

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

অথবা, $\cos x\cos\frac{1}{6}\pi+\sin x\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$

অথবা, $\cos(x-\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{2}=\cos\frac{1}{3}\pi$.

$\therefore\ x-\dfrac{\pi}{6}=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$ অর্থাৎ $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $x=\pm\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{6}\pi$.

$n=1$ হইলে, $x=2\pi\pm\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{5}{2}\pi$; ইহাদের মধ্যে $\frac{5}{2}\pi>2\pi$.

$n=-1$ হইলে, $x=-2\pi\pm\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{6}\pi=-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{13}{6}\pi$; ইহাদের মধ্যে $-\frac{13}{6}\pi<-2\pi$.

$\therefore$ x-এর নির্ণেয় মান $(-2\pi<x<2\pi)$ হইল $-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$.

উদাহরণ 11. সমাধান কর :

$5\cos\theta+2\sin\theta=2$, (প্রদত্ত $\tan 68^\circ\,12'=\frac{5}{2}$).

এখানে, $5\cos\theta+2\sin\theta=2$,

অথবা $\frac{5}{2}\cos\theta+\sin\theta=1$

অথবা $\tan\alpha\cos\theta+\sin\theta=1$; মনে কর, $\alpha=68^\circ 12'$

অথবা $\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=\cos\alpha$

অথবা $\sin(\theta+\alpha)=\cos\alpha=\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$.

$\therefore\ \theta+\alpha=n\pi+(-1)^n(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$.

$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n(90^\circ-68^\circ 12')-68^\circ 12'$

$=n\pi+(-1)^n.\ 21^\circ 48'-68^\circ 12'$;

এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 12. $\tan ax-\tan bx=0$ হইলে, দেখাও যে, x-এর মানগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $\tan ax=\tan bx$.

$\therefore\ ax=n\pi+bx$; এখানে $n=0$, অথবা, যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore\ (a-b)x=n\pi$, অর্থাৎ $x=\dfrac{n\pi}{a-b}$.

এখন, $n=\cdots\cdots-2,\ -1, 0, 1, 2,\cdots\cdots$ বসাইলে, x-এর মান পাওয়া যায়

$$\cdots\cdots\frac{-2\pi}{a-b},\ \frac{-\pi}{a-b},\ 0,\ \frac{\pi}{a-b},\ \frac{2\pi}{a-b},\cdots\cdots$$

ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী, যাহার সাধারণ অন্তর $\dfrac{\pi}{a-b}$.

প্রশ্নমালা X

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (1—20) :

1. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2.$ [W.B.B.H.S.]

2. (i) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3.$

(ii) $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5,\ 0 < \theta < 360^\circ.$ [W.B.B.H.S.]

3. (i) $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta.$

(ii) $\sin 2x + \tan x = 1 + \tan x \sin 2x.$

4. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0.$

5. (i) $\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta.$ [C.P.U.]

(ii) $\tan ax - \cot bx = 0.$

6. (i) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$

(ii) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$

7. (i) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x,\ (0 < x < \pi).$ [W.B.B.H.S.]

(ii) $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta,\ (0 < \theta < \pi).$ [B.U.Ent.]

8. (i) $\tan x - \cot x = \operatorname{cosec} x.$

(ii) $\tan\theta + \cot\theta = 2\operatorname{cosec}\theta,\ (0 < \theta < 2\pi).$ [W.B.B.H.S.]

(iii) $2\cot x + \sin x = 2\operatorname{cosec} x.$ [C.P.U.]

9. $\tan\theta + \cot 2\theta = 2.$ [W.B.B.H.S.]

10. $2 - \cos x = 2\tan\frac{1}{2}x.$

11. $\cos 2x = \cos x \sin x.$

12. $\cot 2x = \cos x + \sin x.$

13. $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}.$ [W.B.B.H.S.]

14. $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) + \tan(\frac{1}{4}\pi + x) = 4.$

15. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1.$

16. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x.$ [B.U.Ent.]

17. $a\cos\theta + b\sin\theta = c,\ (c \ngtr \sqrt{a^2 + b^2}).$

18. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1.$ [C.P.U.]

19. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2},\ (0^\circ < \theta < 360^\circ).$ [W.B.B.H.S.]

20. $\cos\theta - \sin\theta = 1/\sqrt{2}.$

21. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2,\ -\pi < x < \pi.$

22. $\cos^2\theta - \sin\theta = \frac{1}{4}$, $(0<\theta<2\pi)$.

23. $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$, $(0<\theta<2\pi)$.

24. $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$, $(0<\theta<2\pi)$.

25. $2\sin x \sin 3x = 1$.

26. $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$.

27. $4\cos x + 5\sin x = 5$, প্রদত্ত $\tan 51°21' = \frac{5}{4}$.

28. সমাধান কর (সাধারণ মান নির্ণয়ের প্রয়োজন নাই) :

$\tan x + \tan y = 2, \qquad 2\cos x\cos y = 1.$

29. $\sin x = \sin y$ এবং $\cos x = \cos y$ হইলে, দেখাও যে, $x = y$, অথবা, $x \sim y$ = চারি সমকোণের গুণিতক।

30. $\cos\theta - \sin\theta = \cos\alpha - \sin\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\theta + \tfrac{1}{4}\pi = 2n\pi \pm (\alpha + \tfrac{1}{4}\pi).$$

31. দেখাও যে, $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ এবং $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ সমীকরণত্রয় একই এবং উহাদের সাধারণ মান $\theta = n\pi \pm \alpha$

32. $\sec ax + \sec bx = 0$ হইলে, দেখাও যে, x-এর মানগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

একাদশ অধ্যায়
বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক
(Inverse Circular Functions)

11·1. সংজ্ঞা ঃ

$\sin\ \theta = x$ এর অর্থ হইল যে, θ এরূপ একটি কোণ যাহার সাইন x-এর সমান। ইহাকে সংক্ষেপে $\theta = \sin^{-1}x$ (sine inverse x বা arc sin x) লেখা হয়। সুতরাং $\sin^{-1}x$ প্রতীকের অর্থ হইল যে, ইহা এরূপ একটি কোণ যাহার সাইন, x-এর সমান। অতএব, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ এবং $\sin\ \theta$ একটি সংখ্যা।

$\sin\ \theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ এই দুইটি সম্বন্ধ অভিন্ন।

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$-এর অর্থ হইল যে, ইহা এরূপ একটি কোণ যাহার কোসাইন, x-এর সমান অর্থাৎ $\cos^{-1}x = \theta$ হইলে, $\cos\ \theta = x$.

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ আকারের রাশিকে **বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক** বলে।

টীকা ঃ $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin\ x)^{-1}$ অর্থাৎ $\dfrac{1}{\sin\ x}$ এক নহে ; কারণ $\sin^{-1}x$ একটি কোণ এবং $\dfrac{1}{\sin\ x}$ $(= \text{cosec}\ x)$ একটি সংখ্যা।

$\sin^{-1}x$ এবং $\cos^{-1}x$ লিখিলে অবশ্যই $|\ x\ | \leqslant 1$;

অর্থাৎ $\sin^{-1}2$, ইত্যাদির কোন বাস্তব অর্থ নাই।

11·2. সাধারণ এবং মুখ্যমান ঃ

পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে যে, একটি কোণ θ-এর সাইন x-এর সমান হইলে, $n\pi + (-1)^n\theta$-এর অন্তর্গত সমুদয় কোণের সাইন x-এর সমান হইবে। সুতরাং $\sin^{-1}x$-এর মান অসংখ্য হইতে পারে এবং সেজন্য উহাকে একটি **বহুমান-অপেক্ষক** (Multiple-valued Function) বলে।

$\therefore\ \sin^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= n\pi + (-1)^n \sin^{-1}x$.

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= 2n\pi \pm \cos^{-1}x$

এবং $\tan^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= n\pi + \tan^{-1}x$;

এখানে $n=0$, অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\theta=\sin^{-1}x$ হইলে, θ-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম মানকে $\sin^{-1}x$-এর **মুখ্যমান** (Principal value) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্যমান $30°$, $\tan^{-1}(-1)$-এর মুখ্যমান $-45°$, ইত্যাদি।

যদি দুইটি কোণ পাওয়া যায়, যাহাদের সাংখ্যমান সমান, অর্থাৎ একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, তাহা হইলে ধনাত্মক কোণটিকেই মুখ্যমান ধরা হয়। উদাহরণস্বরূপ, $\cos^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্যমান $60°$, $-60°$ নহে; যদিও $\cos(-60°)=\frac{1}{2}$.

কোন কিছু উল্লিখিত না থাকিলে, সংখ্যাবাচক উদাহরণে মুখ্যমানই গণ্য করা হয়।

11·3. $\sin\theta=x$ হইলে, $\theta=\sin^{-1}x$ অর্থাৎ $\theta=\sin^{-1}\sin\theta$.

$$\therefore\quad \sin^{-1}\sin\theta=\theta.$$

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}\cos\theta=\theta$, $\tan^{-1}\tan\theta=\theta$,

$$\operatorname{cosec}^{-1}\operatorname{cosec}\theta=\theta,\ \sec^{-1}\sec\theta=\theta,\ \cot^{-1}\cot\theta=\theta.$$

পুনরায়, $\theta=\sin^{-1}x$ হইলে, $\sin\theta=x$ অর্থাৎ $\sin\sin^{-1}x=x$.

অনুরূপভাবে, $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$,

$$\operatorname{cosec}\operatorname{cosec}^{-1}x=x,\ \sec\sec^{-1}x=x,\ \cot\cot^{-1}x=x.$$

11·4. $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$ হইলে, $\operatorname{cosec}\theta=x$.

$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{x}$. সুতরাং $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{x}$.

$$\therefore\quad \operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}.$$

অনুরূপভাবে, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$ এবং $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x}$.

পুনরায়, বিপরীতক্রমে,

$$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}=\sin^{-1}x,\ \sec^{-1}\frac{1}{x}=\cos^{-1}x \text{ এবং } \cot^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}x.$$

11·5. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির যে-কোন একটিকে যেরূপ অপর যে-কোন একটি কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়, অনুরূপভাবে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির যে-কোন একটিকে অপর যে-কোন একটি অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \sin\theta=x$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ অর্থাৎ $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\theta$.

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\theta$.

$\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{x}$ অর্থাৎ $\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}=\theta$.

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ $\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\theta$.

$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ অর্থাৎ $\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\theta$.

$$\therefore\ \theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

11·6. প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$;

(ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$;

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$.

প্রমাণ ঃ

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে $\sin\theta=x$.

এক্ষণে, $\sin\theta=\cos(\frac{1}{2}\pi-\theta)$.

$\therefore\ \cos(\frac{1}{2}\pi-\theta)=x$. $\therefore\ \cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi-\theta$.

সুতরাং $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{1}{2}\pi-\theta=\frac{1}{2}\pi$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে $\tan\theta=x$.

এক্ষণে, $\tan\theta=\cot(\frac{1}{2}\pi-\theta)$.

$\therefore\ \cot(\frac{1}{2}\pi-\theta)=x$. $\therefore\ \cot^{-1}x=\frac{1}{2}\pi-\theta$.

সুতরাং $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\theta+\frac{1}{2}\pi-\theta=\frac{1}{2}\pi$.

(iii) মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে $\operatorname{cosec}\theta=x$.

এক্ষণে, $\operatorname{cosec}\theta=\sec(\frac{1}{2}\pi-\theta)$.

$\therefore\ \sec(\frac{1}{2}\pi-\theta)=x$. $\therefore\ \sec^{-1}x=\frac{1}{2}\pi-\theta$.

সুতরাং $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\theta+\frac{1}{2}\pi-\theta=\frac{1}{2}\pi$.

টীকা ঃ x-এর শুধুমাত্র ধনাত্মক মানের ক্ষেত্রে সূত্র (ii) প্রযোজ্য।

11·7. (i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

(ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

প্রমাণ : মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$.

$\therefore\ \tan\alpha=x$ এবং $\tan\beta=y$.

(i) এক্ষণে, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x+y}{1-xy}$.

$\therefore\ \alpha+\beta=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$,

অর্থাৎ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

(ii) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$.

$\therefore\ \alpha-\beta=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$,

অর্থাৎ $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x}$$

এবং $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

টীকা 1. (i)-এ $y=x$ বসাইলে, $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

টীকা 2. সূত্র (i) শুধুমাত্র $xy<1$ হইলে প্রযোজ্য হইবে।

অন্যথায় $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\pi-\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ হইবে।

11·8. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$.

প্রমাণ : $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

$$=(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}.\ z}$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$ এবং $\tan^{-1}z=\gamma$.

$\therefore\ \tan\alpha=x,\ \tan\beta=y$ এবং $\tan\gamma=z$.

এক্ষণে, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

অর্থাৎ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$.

টীকা ঃ $x=y=z$ হইলে, $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

11·9. (i) $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$;

(ii) $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$;

(iii) $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}(-x)=\theta$; তাহা হইলে $\sin\theta=-x$.

$x=-\sin\theta=\sin(-\theta)$, অর্থাৎ $-\theta=\sin^{-1}x$.

$\therefore\ \sin^{-1}(-x)=\theta=-\sin^{-1}x$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}(-x)=\theta$; তাহা হইলে $\cos\theta=-x$.

$\therefore\ x=-\cos\theta=\cos(\pi-\theta)$, অর্থাৎ $\pi-\theta=\cos^{-1}x$.

$\therefore\ \cos^{-1}(-x)=\theta=\pi-\cos^{-1}x$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}(-x)=\theta$; তাহা হইলে $\tan\theta=-x$.

$\therefore\ x=-\tan\theta=\tan(-\theta)$, অর্থাৎ $-\theta=\tan^{-1}x$.

$\therefore\ \tan^{-1}(-x)=\theta=-\tan^{-1}x$.

11·10. (i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$.

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$.

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

প্রমাণ ঃ (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\sin^{-1}y=\beta$.

$\therefore\ \sin\alpha=x$ এবং $\sin\beta=y$.

সুতরাং $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

এক্ষণে, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

$$\therefore\quad \sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

(ii) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}).$$

$$\therefore\quad \sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}).$$

(iii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\gamma$ এবং $\cos^{-1}y=\delta$.

$\therefore\quad \cos\gamma=x$ এবং $\cos\delta=y$.

সুতরাং $\sin\gamma=\sqrt{1-x^2}$ এবং $\sin\delta=\sqrt{1-y^2}$.

এখন $\cos(\gamma+\delta)=\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta$

$$=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

$$\therefore\quad \cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\gamma+\delta=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$$

(iv) $\cos(\gamma-\delta)=\cos\gamma\cos\delta+\sin\gamma\sin\delta$

$$=xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

$$\therefore\quad \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\gamma-\delta=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) ও (iii)-এ $y=x$ বসাইলে,

$$2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$$

এবং $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

অনুরূপভাবে, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

এবং $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

11·11. $\mathbf{2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

$$\mathbf{=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.}$$

মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে $\tan\theta=x$

এবং $2\tan^{-1}x=2\theta$.

এক্ষণে, $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

$\therefore\ 2\tan^{-1}x = 2\theta = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

আবার, $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

$\therefore\ 2\tan^{-1}x = 2\theta = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

পুনরায়, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

$\therefore\ 2\tan^{-1}x = 2\theta = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

$\therefore\ 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

11·12. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর : $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$; তাহা হইলে $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}$.

$\therefore\ \sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\pi$.

বামপক্ষ $= \tan^{-1}(\tan\frac{1}{4}\pi) + (\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3})$

$= \frac{1}{4}\pi + \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\pi + \tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$

$= \frac{1}{4}\pi + \tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi + \tan^{-1}\tan\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$ এবং $\cos^{-1}\frac{12}{13} = \beta$.

$\therefore\ \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\beta = \frac{12}{13}$.

$\therefore\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

এবং $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$.

এক্ষণে, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{12}{13}+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{5}{13}=\tfrac{56}{65}.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\tfrac{56}{65}$$

অর্থাৎ $\sin^{-1}\tfrac{3}{5}+\cos^{-1}\tfrac{12}{13}=\sin^{-1}\tfrac{56}{65}$.

টীকা : এই সমস্ত ক্ষেত্রে অন্যান্য বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলিকে $\tan^{-1}x$ আকারে পরিবর্তিত করিয়া লইলে প্রশ্নটি সমাধান করিতে বিশেষ স্থবিধা হয়।

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$.

মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}=\alpha$. $\quad\therefore\ \operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{5}$.

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}=\frac{1}{\sqrt{5-1}}=\tfrac{1}{2}.$$

$\therefore\ \alpha=\tan^{-1}\tfrac{1}{2}$, অর্থাৎ $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}=\tan^{-1}\tfrac{1}{2}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=4(\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{2})$

$$=4\tan^{-1}\frac{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}}{1-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}}=4\tan^{-1}\frac{\tfrac{5}{6}}{\tfrac{5}{6}}$$

$=4\tan^{-1}1=4\tan^{-1}(\tan\tfrac{1}{4}\pi)=4\cdot\tfrac{1}{4}\pi=\pi=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}+\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} \qquad [\text{C. P. U.}]$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(\tan^{-1}b-\tan^{-1}c)+(\tan^{-1}c-\tan^{-1}a)+(\tan^{-1}a-\tan^{-1}b)=0.$$

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $\cos(2\cos^{-1}x)=2x^2-1$.

মনে কর, $\cos^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে $\cos\theta=x$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2x^2-1=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

মনে কর, $\tan^{-1}2=\alpha$ এবং $\cot^{-1}3=\beta$.

$\therefore\ \tan\alpha=2$ এবং $\cot\beta=3$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta=1+\tan^2\alpha+1+\cot^2\beta$

$=2+2^2+3^2=15=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 8. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tfrac{1}{2}\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$yz+zx+xy=1.$$

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tfrac{1}{2}\pi$$

অথবা, $\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}=\frac{1}{2}\pi-\tan^{-1}z$

অথবা, $\dfrac{x+y}{1-xy}=\tan(\frac{1}{2}\pi-\tan^{-1}z)=\cot(\tan^{-1}z)$

$$=\cot\left(\cot^{-1}\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$$

অথবা $xz+yz=1-xy.$

$\therefore\ xy+yz+zx=1.$

বিকল্প পদ্ধতি : $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{1}{2}\pi$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=\frac{1}{2}\pi$$

অর্থাৎ $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=\tan\frac{1}{2}\pi$

$\therefore\ 1-yz-zx-xy=0$ অর্থাৎ $yz+zx+xy=1.$

উদাহরণ 9. দেখাও যে, $\cot^{-1}(\tan x)+\tan^{-1}(\cot x)=\pi-2x.$

বামপক্ষ$=\cot^{-1}\cot(\frac{1}{2}\pi-x)+\tan^{-1}\tan(\frac{1}{2}\pi-x)$

$=\frac{1}{2}\pi-x+\frac{1}{2}\pi-x=\pi-2x=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 10. দেখাও যে, $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}.$

মনে কর, $\cot^{-1}x=\alpha$; তাহা হইলে, $\cot\alpha=x.$

$$\therefore\ \sin\cot^{-1}x=\sin\alpha=\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\therefore\ \tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\beta$ (মনে কর)।

$$\therefore\ \tan\beta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\therefore$ বামপক্ষ$=\cos\beta=\dfrac{1}{\sec\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{1+x^2}}}$

$=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 11. সমাধান কর :

$$3\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}-4\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}+2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{3}.\quad \text{[C. P. U.]}$$

প্রমাণিত সূত্র হইতে প্রদত্ত সমীকরণটি হইবে

$$3 \,.\, 2\tan^{-1}x - 4 \,.\, 2\tan^{-1}x + 2 \,.\, 2\tan^{-1}x = \tfrac{1}{3}\pi$$

অথবা, $2\tan^{-1}x = \frac{1}{3}\pi$ অথবা, $\tan^{-1}x = \frac{1}{6}\pi$

অথবা, $x = \tan\frac{1}{6}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

উদাহরণ 12. সমাধান কর :

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\tfrac{4}{7}. \qquad \text{[C. P. U.]}$$

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে

$$\tan^{-1}\frac{(x+1)+(x-1)}{1-(x+1)(x-1)} = \tan^{-1}\frac{4}{7}$$

অথবা, $\dfrac{2x}{1-x^2+1} = \dfrac{4}{7}$

অথবা, $14x = 8 - 4x^2$

অথবা, $2x^2 + 7x - 4 = 0$

অথবা, $(x+4)(2x-1) = 0$.

$\therefore\ x = -4, \frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা XI

প্রমাণ কর (**1–21**) :

1. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi$.

2. $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$. [W.B B.H.S.]

3. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}\dfrac{1-x-y-xy}{1+x-y+xy} = \dfrac{\pi}{4}$. [C.P.U.]

4. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi$. [C.P.U.]

5. (i) $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \cot^{-1}\frac{24}{7} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$. [W.B.B.H.S.]

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}(x+1) = \tan^{-1}(x^2+x+1)$.

(iii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$. [C.P.U.]

6. $2(\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9}) = \cos^{-1}\frac{3}{5}$. [W.B.B.H.S.]

7. $\tan^{-1}\frac{27}{11} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$.

8. $2\cot^{-1}5 + \cot^{-1}7 + 2\cot^{-1}8 = \frac{1}{4}\pi$. [W.B.B.H.S.]

9. (i) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$. [C.P.U.]

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi$.

10. $4(\cot^{-1}2+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{10})=\pi$.

11. $\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}+\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}=0$.

12. $\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}+\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$.

13. (i) $\sec^2(\tan^{-1}3)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}5)=36$.

(ii) $\sec^2(\cot^{-1}3)+\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)=2\frac{13}{36}$.

14. $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{(1-x^2)}$.

15. $2\tan^{-1}\sqrt{x}=\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$.

16. $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)=\cos^{-1}\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}$. [C.P.U.]

17. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$.

18. $\cot^{-1}(\tan 2x)+\cot^{-1}(-\tan 3x)=x$.

19. $\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c)$

$$=\cot(\cot^{-1}a+\cot^{-1}b+\cot^{-1}c).$$

20. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x=x$.

21. $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

22. $\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta=\frac{4}{3}$ হইলে, দেখাও যে, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

23. $\sec^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}y$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$.

24. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$ [W.B.B.H.S.]

25. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$x+y+z=xyz.$$ [B.U. Ent.]

26. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$x\sqrt{(1-x^2)}+y\sqrt{(1-y^2)}+z\sqrt{(1-z^2)}=2xyz.$$

27. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

28. $\tan^{-1}y=4\tan^{-1}x$ হইলে, y-কে x-এর বীজগণিতীয় অপেক্ষকরূপে প্রকাশ কর।

29. $\tan^{-1}a$, $\tan^{-1}b$, $\tan^{-1}c$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, a, b, c-এর মধ্যে বীজগণিতীয় সম্বন্ধ নির্ধারণ কর। a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,

$$a=b=c\ (b\neq 0,\ 1,\ \text{বা}\ -1).$$

30. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\frac{1}{3})$.

(ii) $\cos(\tan^{-1}2+\cot^{-1}2)$.

(iii) $\operatorname{cosec}(\tan^{-1}2+\sec^{-1}3)$.

31. সমাধান কর :

(i) $\tan^{-1}(1-x)+\tan^{-1}(1+x)=\frac{1}{4}\pi$. [C.P.U.]

(ii) $\sin^{-1}\dfrac{2p}{1+p^2}-\cos^{-1}\dfrac{1-q^2}{1+q^2}=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(iii) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$.

(iv) $\cot(\cos^{-1}x)=\operatorname{cosec}(\tan^{-1}2)$.

(v) $\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x}+\tan^{-1}7=0$.

(vi) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$.

(vii) $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$.

(viii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\pi$. [C P.U.]

(ix) $\sin^{-1}\dfrac{5}{x}+\sin^{-1}\dfrac{12}{x}=\dfrac{\pi}{2}$. [W.B.B.H.S.]

32. সমাধান কর :

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2}{3}\pi$, $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{1}{3}\pi$. [W.B.B.H.S.]

দ্বাদশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম্ ও কোণানুপাতের তালিকা

(Logarithmic and Trigonometrical Tables)

12·1. সংজ্ঞা ঃ একটি নির্দিষ্ট রাশির কোন ঘাত অপর একটি নির্দিষ্ট রাশির সমান হইলে, সেই ঘাতের সূচককে দ্বিতীয় রাশির **লগারিদ্‌ম্** বলে, যাহার **নিধান** (base) হইবে প্রথম রাশি।

$a^x = N (a>0,\ a\neq 1)$ হইলে, সূচক x-কে a নিধান সাপেক্ষে N রাশিটির লগারিদ্‌ম্ বলা হয় এবং লেখা হয়, $\mathbf{x = \log_a N}$.

সুতরাং $x=\log_a N$ = হইলে, $N=a^x$.

বিপরীতক্রমে, $a^x = N$ হইলে, $x=\log_a N$.

উদাহরণস্বরূপ, $3^2=9$, সুতরাং $\log_3 9 = 2$;

$2^{-3}=\frac{1}{8}$, সুতরাং $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; ইত্যাদি।

ভিন্ন ভিন্ন নিধান হইলে একই রাশির ভিন্ন ভিন্ন লগারিদ্‌ম্ পাওয়া যায়। যেমন,

$2^4=16$, সুতরাং $\log_2 16 = 4$; আবার, $4^2=16$, সুতরাং $\log_4 16=2$.

এইজন্য কোণ রাশির লগারিদ্‌মে নিধানের উল্লেখের নিতান্ত প্রয়োজন ; তবে কোন প্রশ্নে সমুদয় লগারিদ্‌ম্‌গুলির একই নিধান হইলে, সুবিধার জন্য ঐ নিধানটিকে উহ্য রাখা চলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) $a^x = N$ হইলে, $x=\log_a N$. $\therefore\ a^{\log_a N} = N$.

(ii) $a(\neq 0)$-এর যে-কোন নির্দিষ্ট বাস্তবমানের জন্য $a^0=1$. $\therefore\ \log_a 1 = 0$; অর্থাৎ 0 ও ∞ ব্যতীত যে-কোন বাস্তব নিধানের সাপেক্ষে 1-এর লগারিদ্‌ম্ শূন্য।

(iii) $a(\neq 0)$ যে-কোন রাশি হইলে, $a^1 = a$. $\therefore\ \log_a a = 1$; অর্থাৎ 0 ও 1 ব্যতীত যে-কোন নিধানের সাপেক্ষে উহার সমান রাশির লগারিদ্‌ম্ এক।

টীকা ঃ (i) a ধনাত্মক বাস্তব হইলে x-এর যে-কোন মানের জন্যই a^x কখনও একটি ঋণাত্মক রাশির সমান হয় না। সুতরাং নিধান ধনাত্মক বাস্তব হইলে কোন ঋণাত্মক রাশির লগারিদ্‌ম্ কাল্পনিক হইবে।

(ii) $a>1$ হইলে, $a^x \to 0$ হয়, যদি $x \to -\infty$ হয়

এবং $a<1$ হইলে, $a^x \to 0$ হয়, যদি $x \to +\infty$ হয়।

$\therefore$ $\log_a 0 \to -\infty$ যদি $a>1$ হয় এবং $\log_a 0 \to +\infty$ যদি $a<1$ হয়।

(iii) $a>1$ হইলে, $a^x \to \infty$ হয়, যদি $x \to +\infty$ হয়

এবং $a<1$ হইলে, $a^x \to \infty$ হয়, যদি $x \to -\infty$ হয়।

$\therefore$ $\log_a \infty \to \infty$, যদি $a>1$ হয় এবং $\log_a \infty \to -\infty$, যদি $a<1$ হয়।

12·2. লগারিদমের ধর্মাবলী :

(i) **দুইটি রাশির গুণফলের লগারিদম্ রাশি দুইটির লগারিদম্‌দ্বয়ের সমষ্টির সমান ; অর্থাৎ**

$$\mathbf{\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n.}$$

মনে কর, $\log_a (m \times n) = x$, $\log_a m = y$ এবং $\log_a n = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m \times n$, $a^y = m$ এবং $a^z = n$.

$\therefore$ $a^x = m \times n = a^y \times a^z = a^{y+z}$.

$\therefore$ $x = y + z$; অর্থাৎ $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a(m \times n \times p) = \log_a\{m \times (n \times p)\}$

$= \log_a m + \log_a(n \times p) = \log_a m + \log_a n + \log_a p$.

সাধারণভাবে,

$\log_a(m.n.p.q\ldots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \log_a q + \cdots\cdots$

অর্থাৎ যে-কোন সংখ্যক রাশির গুণফলের লগারিদম্, রাশিগুলির প্রত্যেকটির লগারিদমের সমষ্টির সমান।

(ii) **দুইটি রাশির ভাগফলের লগারিদম্, উহার লবের লগারিদম্ এবং হরের লগারিদমের অন্তরের সমান ; অর্থাৎ**

$$\mathbf{\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.}$$

মনে কর, $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x$, $\log_a m = y$ এবং $\log_a n = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = \frac{m}{n}$, $a^y = m$ এবং $a^z = n$.

$\therefore$ $a^x = \frac{m}{n} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$.

$\therefore$ $x = y - z$; অর্থাৎ $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

(iii) **একটি রাশির কোন ঘাতের লগারিদম্, ঐ ঘাতের সূচক ও রাশিটির লগারিদমের গুণফলের সমান ; অর্থাৎ**

$$\mathbf{\log_a (m)^n = n \log_a m.}$$

মনে কর, $\log_a(m)^n = x$ এবং $\log_a m = y$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m^n$ এবং $a^y = m$.

$$\therefore \quad a^x = m^n = (a^y)^n = a^{ny}.$$

$$\therefore \quad x = ny \text{ ; অর্থাৎ } \log_a(m)^n = n \log_a m.$$

টীকা : লগারিদমের ধর্মাবলী হইতে দেখা যায় যে, গুণন, ভাগ, উদ্ঘাতন (Involution) এবং মূলাকর্ষণ (Evolution) লগারিদমের সাহায্যে শুধু যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারাই সম্পন্ন করা যায়।

12·3. নিধানের পরিবর্তন :

দুইটি পৃথক নিধানের সাপেক্ষে একই রাশির লগারিদমের পারস্পরিক সূত্রটি হইল

$$\mathbf{\log_a m = \log_b m \times \log_a b.}$$

মনে কর, $\log_a m = x$, $\log_b m = y$ এবং $\log_a b = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $b^y = m$ এবং $a^z = b$.

$$\therefore \quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}.$$

$$\therefore \quad x = yz \text{ ; অর্থাৎ } \log_a m = \log_b m \times \log_a b.$$

একটি নিধানের সাপেক্ষে কোন রাশির লগারিদম্ জানা থাকিলে, এই সূত্রের সাহায্যে, অপর একটি নিধানের সাপেক্ষে রাশিটির লগারিদম্ জানা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : উপরের সূত্রে, $m = a$ বসাইলে,

$$\mathbf{\log_b a \times \log_a b = 1} \qquad (\because \ \log_a a = 1)$$

অর্থাৎ $\mathbf{\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}}$.

সুতরাং $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$ হইতে,

$$\mathbf{\log_a m} = \log_b m \times \frac{1}{\log_b a} = \frac{\mathbf{\log_b m}}{\mathbf{\log_b a}}.$$

অতএব b-নিধানের সাপেক্ষে m ও a-এর লগারিদমদ্বয় জানা থাকিলে $\log_b m$ কে $\dfrac{1}{\log_b a}$ দ্বারা গুণ করিয়া, a-নিধানের সাপেক্ষে m-এর লগারিদম্ পাওয়া যাইবে। এস্থলে, $\dfrac{1}{\log_b a}$ কে $\log_a m$-এর নিধান a-এর **মডিউলাস** বলে।

টীকা ঃ উপরের অনুসিদ্ধান্তের তথ্যগুলি নিরপেক্ষভাবেও প্রমাণ করা যায়। যেমন, $\log_b a = x$ এবং $\log_a b = y$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে, $b^x = a$ এবং $a^x = b$.

$\therefore \quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}$.

$\therefore \quad xy = 1$; অর্থাৎ $\log_b a \times \log_a b = 1$.

12·4. সাধারণ ও নেপিয়ার লগারিদম্ ঃ

শূন্য ব্যতীত যে-কোন বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যাকে নিধানরূপে ব্যবহার করা যাইলেও বাস্তবক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুইটি রাশি 10 ও e-কে নিধানরূপে ব্যবহার করা হয়। সেজন্য লগারিদমে দুইটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে—সাধারণ পদ্ধতি এবং নেপিয়ার পদ্ধতি।

10-কে নিধান ধরিলে কোন রাশির যে-লগারিদম্ হয়, তাহাকে **সাধারণ লগারিদম্** (Common logarithm) বলে। লিখিবার সুবিধার জন্য সাধারণতঃ নিধান 10-কে উহ্য রাখা হয়। সেজন্য কোন লগারিদমে নিধানের উল্লেখ না থাকিলে বুঝিতে হইবে উহার নিধান হইল 10. Henry Briggs প্রথম এই পদ্ধতির প্রচলন করেন বলিয়া আবিষ্কারকের নামানুসারে ইহাকে ব্রিগ্রিয়ান পদ্ধতিও বলা হয়। যে-কোন পাটীগণিতীয় (numerical) রাশির লগারিদমে এই পদ্ধতি ব্যবহৃত হয় এবং এজন্যই ইহাকে সাধারণ লগারিদম্ বলে। সুতরাং log 2-এর অর্থ হইল $\log_{10} 2$.

e এরূপ একটি রাশির প্রতীক যাহার মান

$$1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

ইহা একটি অমেয় রাশি এবং 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার আসন্ন মান 2·71828. এই e-কে নিধান ধরিলে কোন রাশির যে-লগারিদম্ হয়, তাহাকে **নেপিয়ার লগারিদম্** বলে। John Napier এই পদ্ধতির আবিষ্কারক এবং তাঁহার নামানুসারে এই পদ্ধতির নাম Napierian system. এখানে এই পদ্ধতির আলোচনা করিবার অবকাশ নাই।

12·2. সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ঃ

সাধারণ লগারিদমে নিধান 10. $10^x = n$ (n একটি ধনাত্মক রাশি)-সমীকরণের বীজ সাধারণভাবে পূর্ণসংখ্যা নহে। সুতরাং কোন রাশির সাধারণ লগারিদম্ যে পূর্ণসংখ্যা হইবেই তাহার কোন নিশ্চয়তা নাই। ইহার কিছু অংশ পূর্ণ এবং কিছু অংশ দশমিক হইতে পারে। এই পূর্ণঅংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং দশমিকাংশকে **অংশক** (Mantissa) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, log 12·3 = 1·08991 ; সুতরাং 12·3-এর লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1 এবং অংশক ·08991.

পূর্ণক শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে, কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক হইবে।

12·6. পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম :

যে-কোন সংখ্যাকে দেখিয়াই উহার লগের পূর্ণক কত হইবে বলা যায়।

প্রথমে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যা লওয়া যাউক।

$10^0 = 1.$ $\therefore$ $\log 1 = 0.$

$10^1 = 10.$ $\therefore$ $\log 10 = 1.$

$10^2 = 100.$ $\therefore$ $\log 100 = 2.$

$10^3 = 1000.$ $\therefore$ $\log 1000 = 3.$

$10^4 = 10000.$ $\therefore$ $\log 10000 = 4.$

... ...

সুতরাং 1 এবং 10-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 0 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ, যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ এক-অঙ্ক বিশিষ্ট, তাহার লগারিদ্‌ম্ = 0 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ এক-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 0.

10 এবং 100-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ দুই-অঙ্ক-বিশিষ্ট, তাহার লগারিদ্‌ম্ = 1 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ দুই-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1.

100 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট, তাহার লগারিদ্‌ম্ = 2 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2.

অনুরূপভাবে, 1000 এবং 10000-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ চারি-অঙ্ক-বিশিষ্ট, তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 3. সাধারণভাবে, যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ n-সংখ্যক-অঙ্ক-বিশিষ্ট, তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $(n-1)$.

অতএব নিয়মটি হইল,

1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক সর্বদা

ধনাত্মক এবং উহা সংখ্যাটির পূর্ণাংশের অঙ্ক-সংখ্যা অপেক্ষা এক কম হইবে।

এক্ষণে 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যা লওয়া যাউক।

$$10^{0} = 1. \qquad \therefore \log 1 = 0.$$
$$10^{-1} = \tfrac{1}{10} = \cdot 1. \qquad \therefore \log \cdot 1 = -1.$$
$$10^{-2} = \tfrac{1}{100} = \cdot 01. \qquad \therefore \log \cdot 01 = -2.$$
$$10^{-3} = \tfrac{1}{1000} = \cdot 001. \qquad \therefore \log \cdot 001 = -3.$$
$$10^{-4} = \tfrac{1}{10000} = \cdot 0001. \qquad \therefore \log \cdot 0001 = -4.$$

সুতরাং ·1 এবং 1-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ (-1) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে শূন্য থাকে না, তাহার লগারিদম্ $(-1)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-1).

·01 এবং ·1-এ মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ (-2) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং (-1) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে একটি শূন্য থাকে,

তাহার লগারিদম্$=(-2)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ,

অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-2).

·001 এবং ·01-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ (-3) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং (-2) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে দুইটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদম্$=(-3)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-3).

অনুরূপভাবে, ·0001 এবং ·001-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে তিনটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-4).

সাধারণভাবে, পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে n-সংখ্যক শূন্য থাকে, তাহার লগারিদমের পূর্ণক $\{-(n+1)\}$.

অতএব নিয়মটি হইল,

1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক সর্বদা ঋণাত্মক এবং উহা সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যতগুলি শূন্য থাকিবে তাহা অপেক্ষা এক বেশী হইবে।

পূর্ণক ঋণাত্মক হইলে ইহার '–' চিহ্নটিকে মাথায় দিয়া লেখা হয়। উদাহরণস্বরূপ, log 25-এর পূর্ণক 1, log 1·972-এর পূর্ণক 0, log ·221-এর পূর্ণক (–1 অথবা, $\bar{1}$), log ·00117-এর পূর্ণক (–3 অথবা $\bar{3}$), ইত্যাদি।

12·7. অংশক নির্ণয়ের নিয়মঃ

কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করিবার কোন সাধারণ নিয়ম নাই। লগ-তালিকার সাহায্যে অংশক নির্ণয় করিতে হয়।

পুস্তকের শেষে প্রদত্ত প্রথম তালিকাটি দেখ। 5 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ দেওয়া আছে। উহার সাহায্যে চারি অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করা যায়।

অংশক নির্ণয় করিবার সময় দশমিক বিন্দুর অবস্থান বিবেচনা করিবার কোন প্রয়োজন নাই; কেবলমাত্র যে-অঙ্কগুলির দ্বারা সংখ্যাটি গঠিত সেগুলি বিবেচ্য বিষয়। প্রদত্ত সংখ্যাটিতে কেবলমাত্র দুইটি অঙ্ক থাকিলে, লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটি অবস্থিত সেই সারি-বরাবর শূন্য অঙ্কের স্তম্ভে যে-সংখ্যাটি রহিয়াছে তাহার সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে দুই-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে। প্রদত্ত সংখ্যাটিতে একটি মাত্র অঙ্ক থাকিলে উহার ডানদিকে একটি শূন্য দিয়া দুই অঙ্কবিশিষ্ট যে-সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহার লগারিদ্‌মের অংশকই প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক হইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে যদি তিনটি অঙ্ক থাকে, তাহা হইলে লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটির প্রথম দুই সার্থক অঙ্ক অবস্থিত, সেই সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার তৃতীয় অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে তাহার সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে চারিটি অঙ্ক থাকিলে, উহার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করিবার জন্য লগ-তালিকার সর্বদক্ষিণে প্রদত্ত গড়-অন্তর ব্যবহার করিতে হয়। লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটির প্রথম দুই সার্থক অঙ্ক অবস্থিত, সেই সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার তৃতীয় অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে, তাহার সহিত গড় অন্তর তালিকায় ঐ সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার চতুর্থ অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে তাহা যোগ কর। এই যোগফলের সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে চারি-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে চারের অধিক অঙ্ক থাকিলে কেবলমাত্র চারিটি অঙ্ক লইয়া উহার লগারিদমের অংশক নির্ণয় করা হয়।

টীকা : (i) যে-সমস্ত সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি একই এবং একইক্রমে সাজান, তাহাদের দশমিক বিন্দুগুলির অবস্থান পৃথক হইলেও অংশকগুলি একই।

উদাহরণস্বরূপ, $\log 2{\cdot}34 = 0{\cdot}36922$,

$$\log 23{\cdot}4 = \log (2{\cdot}34 \times 10) = \log 2{\cdot}34 + \log 10 = {\cdot}36922 + 1 = 1{\cdot}36922,$$

$$\log 2340 = \log (2{\cdot}34 \times 1000) = \log 2{\cdot}34 + \log 10^3 = {\cdot}36922 + 3 = 3{\cdot}36922\,;$$

অর্থাৎ কোন সংখ্যার অংশক যত, সংখ্যাটিকে 10-এর কোন পূর্ণ ঘাত দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলেও প্রাপ্ত সংখ্যাটির অংশক একই হইবে।

(ii) প্রদত্ত সংখ্যাটিতে পাঁচটি অঙ্ক থাকিলে লগ-তালিকা হইতে প্রথম চারিটি অঙ্ক লইয়া তাহার এবং তাহার পরের সংখ্যাটির লগারিদমের অংশক নির্ণয় করা হয়। তারপর ঐকিক নিয়মের সাহায্যে অনেক সময় প্রদত্ত প্রথম অঙ্কটির জন্য অংশক নির্ণয় করা হয়। ইহা একটি উদাহরণের মাধ্যমে আলোচিত হইল।

$\log 2345{\cdot}6$ নির্ণয় করিতে হইলে, লগ-তালিকা হইতে আমরা লিখি

$\log 2345 = 3{\cdot}37015$ এবং $\log 2346 = 3{\cdot}37033$.

ইহা হইতে বলা যায় যে, সংখ্যাটির 1 বৃদ্ধিতে লগারিদমে ${\cdot}00018$ বৃদ্ধি হয়

$\therefore \quad \ldots \qquad {\cdot}6 \cdots {\cdot}00018 \times {\cdot}6 = {\cdot}00011$ (প্রায়) বৃদ্ধি হয়।

$\therefore \quad \log 2345{\cdot}6 = 3{\cdot}37015 + {\cdot}00011 = 3{\cdot}37026.$

12·8. অ্যান্টি-লগারিদম্ঃ

কোন সংখ্যা N-এর লগারিদম্ যদি m হয়, তাহা হইলে N-কে m-এর **অ্যান্টি-লগারিদম্** (anti-logarithm) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\log 2 = {\cdot}30103$ বলিয়া, ${\cdot}30103$-এর অ্যান্টি-লগারিদম্ হইল 2.

কোন সংখ্যার অ্যান্টি-লগারিদম্ নির্ণয় করিতে হইলে, অ্যান্টি-লগারিদমের তালিকা (পুস্তকের শেষে প্রদত্ত দ্বিতীয় তালিকাটি) হইতে লগারিদম্ তালিকানুযায়ী সংখ্যাটির দশমিক অংশের অ্যান্টি-লগারিদম্ দেখিয়া সংখ্যাটির পূর্ণাংশের অঙ্ক অনুযায়ী দশমিক বিন্দু বসাইতে হয়।

12·9. স্বাভাবিক কোণানুপাতের তালিকাঃ

পুস্তকের শেষে প্রদত্ত তৃতীয় তালিকাটি দেখ। ইহাকে **সাইন ও কোসাইনের স্বাভাবিক তালিকা** বলে। ইহাতে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাইন ও কোসাইনের মান দেওয়া আছে। উপরের বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপর হইতে নীচে এবং বামদিক হইতে ডানদিকে সাইনের মান লেখা আছে। নীচের ডানদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে এবং ডানদিক হইতে বাম দিকে কোসাইনের মান লেখা আছে। যে-কোন কোণের সাইনের মান, উহার পূরক কোণের কোসাইনের মানের সমান বলিয়া তালিকাটি এরূপভাবে গঠন করা হইয়াছে যে, একই তালিকা হইতে সাইন ও কোসাইনের উভয় মানই পাওয়া যাইবে। মূল তালিকাটিতে সাইন বা কোসাইনের মান 10′ ব্যবধানে দেওয়া আছে এবং পাশের গড়-অন্তর তালিকাতে প্রতি 1′ ব্যবধানে সাইন বা কোসাইনের ব্যবধানের শুধুমাত্র সার্থক অঙ্কগুলি দেওয়া আছে। কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইলে, সাইনের মান 0 হইতে 1 পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইবে এবং কোসাইনের মান 1 হইতে 0 পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে হ্রাস পাইবে। সেইজন্য কোণ বর্ধিত হইলে সাইনের ক্ষেত্রে গড়-অন্তর যোগ, কিন্তু কোসাইনের ক্ষেত্রে গড়-অন্তর বিয়োগ করিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, তালিকা হইতে,

$\sin 34°56' = \cdot57119 + \cdot00144 = \cdot57263$

এবং $\cos 34°56' = \cdot82082 - \cdot00099 = \cdot81983$.

পুস্তকের শেষে প্রদত্ত চতুর্থ তালিকাটি দেখ। ইহাকে **ট্যানজেণ্ট ও কোট্যানজেণ্টের স্বাভাবিক তালিকা** বলে। ইহাতে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির ট্যানজেণ্ট ও কোট্যানজেণ্টের মান দেওয়া আছে। তৃতীয় তালিকাটির ন্যায় কোণ বর্ধিত হইলে ট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে গড়-অন্তর যোগ এবং কোট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে গড়-অন্তর বিয়োগ করিয়া এই তালিকাটি হইতে যে-কোন কোণের ট্যানজেণ্টের এবং কোট্যানজেণ্টের মান নির্ণয় করা সম্ভব।

12·10. লগারিদ্‌মিক কোণানুপাতের তালিকাঃ

পুস্তকের শেষে প্রদত্ত পঞ্চম তালিকাটি দেখ। ইহাকে **সাইন ও কোসাইনের** লগারিদ্‌মিক্ তালিকা বলে। 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণের সাইন ও কোসাইন, 0° হইতে 45° পর্যন্ত কোণের ট্যানজেণ্ট এবং 45° হইতে 90° পর্যন্ত কোণের কোট্যানজেণ্টের মান ধনাত্মক এবং এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং উহাদের লগারিদ্‌ম্ ঋণাত্মক হইবে। তালিকাটিকে ঋণরাশিমুক্ত করিবার জন্য কোণানুপাতের

লগারিদম্ তালিকাভুক্ত করিবার পূর্বে উহার সহিত 10 যোগ করা হইয়াছে। ইহাকে লগারিদ্‌মিক কোণানুপাত বলা হয় এবং উহাদিগকে $L \sin \theta$, $L \cos \theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

সুতরাং $L \sin \theta = 10 + \log \sin \theta$, $L \cos \theta = 10 + \log \cos \theta$, ইত্যাদি।

অতএব তালিকাটি হইতে, 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্‌মিক সাইন ও কোসাইনের মান পাওয়া যায় অর্থাৎ $L \sin \theta$ এবং $L \cos \theta$-এর মান পাওয়া যায়, উহারা $\log \sin \theta$ এবং $\log \cos \theta$-এর মান নহে।

$$L \operatorname{cosec} \theta = 10 + \log \operatorname{cosec} \theta = 10 + \log \frac{1}{\sin \theta}$$
$$= 10 + \log (\sin \theta)^{-1}$$
$$= 10 - (L \sin \theta - 10) = 20 - L \sin \theta.$$

অনুরূপভাবে, $L \sec \theta = 20 - L \cos \theta$.

পুস্তকের শেষে প্রদত্ত ষষ্ঠ তালিকাটি **লগারিদ্‌মিক্ ট্যানজেণ্ট ও কোট্যানজেণ্টের তালিকা**। ইহা হইতে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্ট ($L \tan \theta$) এবং লগারিদ্‌মিক কোট্যানজেণ্ট ($L \cot \theta$)-এর মান পাওয়া যায়।

12·11. সমানুপাতী অংশের তথ্য ঃ

কোন সংখ্যার লগারিদমের মানের পরিবর্তন ঐ সংখ্যার স্বল্পপরিবর্তনের সমানুপাতী হইবে। কোন কোণানুপাতের মানের পরিবর্তন কোণের স্বল্পপরিবর্তনের সমানুপাতী হইবে।

Calculus-এর সাহায্যে ইহা প্রমাণ করা যায়। এ তথ্যকে এখানে সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া হইবে।

12·12. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $\log 2 = 0{\cdot}3010300$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$ এবং $\log 7 = 0{\cdot}8450980$ হইলে, (i) $\log 84$, (ii) $\log 105$ এবং (iii) $\log {\cdot}294$-এর মান নির্ণয় কর।

(i) $\log 84 = \log (2^2 \times 3 \times 7) = 2 \log 2 + \log 3 + \log 7$
$$= 2 \times {\cdot}3010300 + {\cdot}4771213 + {\cdot}8450980$$
$$= {\cdot}6020600 + {\cdot}4771213 + {\cdot}8450980 = 1{\cdot}9242793.$$

(ii $\log 105=\log (3\times 7\times \frac{10}{2})=\log 3+\log 7+\log 10-\log 2$

$=\cdot4771213+\cdot8450980+1-\cdot3010300$

$=2\cdot3222193-\cdot3010300=2\cdot0211893.$

(iii) $\log \cdot294=\log \frac{294}{1000}=\log 294-\log 10^3$

$=\log (2\times 3\times 7^2)-3\log 10$

$=\log 2+\log 3+2\log 7-3$

$=\cdot3010300+\cdot6771213+2\times\cdot8450980-3$

$=-3+\cdot7781513+1\cdot6901960=-3+2\cdot4683473$

$=-1+\cdot4683473=\bar{1}\cdot4683473.$

উদাহরণ 2. (i) $\log 2=\cdot30103$ হইলে, 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

(ii) 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটির প্রথম সার্থক অঙ্কটির অবস্থান নির্ণয় কর।

(i) $\log 2^{64}=64\log 2=64\times\cdot30103=19\cdot26592.$

সুতরাং 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 19.

$\therefore$ 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা $=19+1=20.$

(ii) $\log 3^{-20}=-20\log 3=-20\times\cdot47712$

$=-9\cdot5424=-9-\cdot5424$

$=-9-1+(1-\cdot5424)=-10+\cdot4576=\overline{10}\cdot4576.$

সুতরাং 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটির লগের পূর্ণক -10.

$\therefore$ 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটিতে দশমিক বিন্দুর পর (10 – 1 টি বা 9টি শূন্য আছে।

$\therefore$ প্রথম সার্থক অঙ্কটি দশম অঙ্ক।

উদাহরণ 3. $\log 2=\cdot30103$, $\log 3=\cdot47712$ এবং $\log 7=\cdot84509$ হইলে, দেখাও যে, $(\frac{21}{20})^{100}$, 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\log (\frac{21}{20})^{100}=100\log (\frac{3\times 7}{2\times 10})$

$=100\,[\log 3+\log 7-\log 2-\log 10]$

$=100\,[\cdot47712+\cdot84509-\cdot30103-1]$

$=100\,[1\cdot32221-1\cdot30103]=100\times\cdot02118=2\cdot118.$

সুতরাং $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 2 এবং অংশক $\cdot118$ (শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর)।

$\therefore$ $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা $=2+1=3$ এবং $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটি তিন অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাহরণ 4. $\log 3868 = 3{\cdot}58749$ এবং $\log 3869 = 3{\cdot}58761$ হইলে, $\log 38{\cdot}686$-এর মান কত? কোন্ সংখ্যার লগারিদম্ $2{\cdot}58755$?

এখানে, $\log 3868 = 3{\cdot}58749$ এবং $\log 3869 = 3{\cdot}58761$.

সুতরাং সংখ্যাটিতে 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদমে ${\cdot}00012$ বৃদ্ধি পায়

$\therefore$ ... ${\cdot}6$ ... ... ${\cdot}6 \times {\cdot}00012$ বা ${\cdot}00007$ (প্রায়) বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $\log 38{\cdot}686$-এর অংশক $= {\cdot}58749 + {\cdot}00007 = {\cdot}58756$

এবং ইহার পূর্ণক $= 2 - 1 = 1$.

$\therefore$ $\log 38{\cdot}686 = 1{\cdot}58756$.

পুনরায়, $3{\cdot}58755$ রাশিটি $3{\cdot}58749$ ও $3{\cdot}58761$-এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং যে-সংখ্যার লগারিদম্ $3{\cdot}58755$, সেই সংখ্যাটি 3868 ও 3869-এর মধ্যে অবস্থিত। $3{\cdot}58755 - 3{\cdot}58749 = {\cdot}00006$.

এক্ষণে, লগারিদমে ${\cdot}00012$ বৃদ্ধিতে সংখ্যাটিতে 1 বৃদ্ধি পায়

$\therefore$ ... ${\cdot}00006$ ... ... $\frac{1}{{\cdot}00012} \times {\cdot}00006$ বা ${\cdot}5$ বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $3{\cdot}58755 = \log 3868{\cdot}5$. $\therefore$ $2{\cdot}58755 = \log 386{\cdot}85$.

যেহেতু অংশকদ্বয় সমান, সুতরাং সংখ্যাদ্বয়ের অঙ্কদ্বয় একই এবং একইক্রমে সাজান এবং পূর্ণক 2 বলিয়া সংখ্যাটির তিনটি অঙ্কের পর দশমিক বসিবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 386{\cdot}85$.

উদাহরণ 5. লগ-তালিকার সাহায্যে 10-এর নবম মূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $x = (10)^{\frac{1}{9}}$.

$\therefore$ $\log x = \log (10)^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \log 10 = {\cdot}11111$.

$\therefore$ $x = \text{Anti-log } {\cdot}11111 = 1{\cdot}2915$, (এ্যাণ্টি-লগের তালিকা হইতে)।

সুতরাং $\sqrt[9]{10} = 1{\cdot}2915$.

উদাহরণ 6. লগ-তালিকার সাহায্যে $\frac{\sqrt[3]{48{\cdot}7} \times ({\cdot}00321)^{\frac{1}{2}}}{0{\cdot}372}$-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

মনে কর, $x = \frac{(48{\cdot}7)^{\frac{1}{3}} \times ({\cdot}00321)^{\frac{1}{2}}}{{\cdot}372}$.

$\therefore \quad \log x = \log \dfrac{(48{\cdot}7)^{\frac{1}{3}} \times ({\cdot}00321)^{\frac{1}{2}}}{{\cdot}372}$

$= \frac{1}{3}\log 48{\cdot}7 + \frac{1}{2}\log {\cdot}00321 - \log {\cdot}372$

$= \frac{1}{2} \times 1{\cdot}68753 + \frac{1}{2} \times \bar{3}{\cdot}50650 - \bar{1}{\cdot}57054$

$= {\cdot}56251 + \frac{1}{2}(-3 + {\cdot}50650) - (-1 + {\cdot}57054)$

$= {\cdot}56251 - 1{\cdot}5 + 25325 + 1 - {\cdot}57054$

$= 1{\cdot}81576 - 2{\cdot}07054 = -1 + 2{\cdot}81576 - 2{\cdot}07054$

$= \bar{1}{\cdot}74522.$

$\therefore \quad x = \text{Anti-log } \bar{1}{\cdot}74522 = {\cdot}55619.$

উদাহরণ 7. $3^x.7^{2x+1} = 11^{x+5}$ সমীকরণটিকে সমাধান করিয়া দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত x-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষের লগারিদম্ লইলে,

$$x \log 3 + (2x+1)\log 7 = (x+5)\log 11$$

অথবা, $x(\log 3 + 2\log 7 - \log 11) = 5\log 11 - \log 7$

অথবা, $x = \dfrac{5\log 11 - \log 7}{\log 3 + 2\log 7 - \log 11}$

$$= \frac{5 \times 1{\cdot}04139 - 0{\cdot}84510}{{\cdot}47712 + 2 \times {\cdot}84510 - 1{\cdot}04139} = \frac{4{\cdot}36185}{1{\cdot}12593} = 3{\cdot}87.$$

উদাহরণ 8. (i) প্রদত্ত $\cos 69^\circ 36' = {\cdot}34857$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর 27; $\cos 69^\circ 36' 50''$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) প্রদত্ত $L \sin 65^\circ 48' = 9{\cdot}06006$ এবং
$L \sin 65^\circ 49' = 9{\cdot}96012$; $L \sin 65^\circ 48' 2_''$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) প্রদত্ত $L \tan 79^\circ 51' 40'' = 10{\cdot}7475657$ এবং
$L \tan 79^\circ 51' 50'' = 10{\cdot}7476172$;
এরূপ কোণ নির্ণয় কর, যাহার $L \tan = 10{\cdot}7476532$.

(i) $1'$ বা $60''$-এর জন্য অন্তর 27 (অর্থাৎ ${\cdot}00027$)

$\therefore \quad 1''$ „ „ „ $\dfrac{1}{60} \times {\cdot}00027$

$\therefore \quad 50''$ „ „ „ $\dfrac{50}{60} \times {\cdot}00027 = {\cdot}00023$ (প্রায়)।

$\therefore \quad \cos 62^\circ 36' 50'' = {\cdot}34857 - {\cdot}00023 = {\cdot}34834.$

(ii) কোণের বৃদ্ধি 1′ বা 60″ হইলে L sin-এর মানের বৃদ্ধি হয়

$9{\cdot}96012 - 9{\cdot}96006 = {\cdot}00006$

∴ „ „ 25″ „ „ „ $\dfrac{{\cdot}00006 \times 25}{60}$

$= {\cdot}00003$ (প্রায়)।

∴ $L \sin 65°48'25'' = 9{\cdot}96006 + {\cdot}00003 = 9{\cdot}96009.$

(iii) মনে কর, নির্ণেয় কোণ $= \theta$.

যেহেতু $10{\cdot}7475657 < 10{\cdot}7476532 < 10{\cdot}7476872$,

সুতরাং θ, $79°51'40''$ এবং $79°51'50''$-এর মধ্যবর্তী।

∴ মনে কর, $\theta = 79°51'40'' + x''$.

এখন, L tan-এর মানের অন্তর

$10{\cdot}7476872 - 10{\cdot}7475657 = {\cdot}0001215$ হইলে, কোণের অন্তর হয় $10''$.

∴ L tan-এর মানের অন্তর $10{\cdot}7476532 - 10{\cdot}7475657$ বা ${\cdot}0000875$ হইলে, কোণের অন্তর হয় $\dfrac{{\cdot}0000875}{{\cdot}0001215} \times 10'' = 7{\cdot}2''$ (প্রায়)।

∴ $x = 7{\cdot}2$.

∴ নির্ণেয় কোণ $= 79°51'40'' + 7{\cdot}2'' = 79°51'47{\cdot}2''$.

প্রশ্নমালা XII

1. $\log 2 = 0{\cdot}3010300$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$ এবং $\log 7 = 0{\cdot}8450980$ হইলে, মান নির্ণয় কর :

(i) $\log 12$. (ii) $\log 45$. (iii) $\log 75$. (iv) $\log 5\frac{1}{16}$.

(v) $\log {\cdot}1875$. (vi) $\log {\cdot}015$. (vii) $\log {\cdot}0054$. (viii) $\log ({\cdot}405)^{\frac{1}{5}}$.

(ix) $\log \left\{\dfrac{(7{\cdot}2)^3 \times ({\cdot}016)^4}{(1\frac{1}{5})^{15}}\right\}$. (x) $\log \left\{\dfrac{(10{\cdot}8)^{\frac{1}{2}} \times ({\cdot}24)^{\frac{5}{3}}}{(90)^{-2}}\right\}$.

2. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_3 54$. (ii) $\log_{\sqrt{8}} 81$.

3. নিম্নের রাশিগুলির লগারিদ্‌মের পূর্ণক নির্ণয় কর :

(i) 2·9. (ii) 117·68. (iii) 0·4352. (iv) 0·07. (v) ·00101.

4. নিম্নের রাশিগুলির লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় কর :

(i) 5. (ii) 19. (iii) 149. (iv) 3867·2.

(v) ·234. (vi) ·0102. (vii) ·00819. (viii) 0·0000023.

5. নিম্নের রাশিগুলির এ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্ (anti-log) নির্ণয় কর :

(i) ·0106. (ii) ·1968. (iii) 2·3456. (iv) 4·8463.

(v) $\bar{1}$·365. (vi) $\bar{2}$·468. (vii) $-$·3869. (viii) -2·7080.

6. $\log 2 = \cdot3010$ এবং $\log 3 = \cdot4771$ হইলে, (i) 3^{12}-এর এবং (ii) $(12)^{12}$-এর তুল্যমান সংখ্যার অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

7. 2^{-10}-এর তুল্যমান রাশিটির দশমিক বিন্দুর এবং প্রথম সার্থক অঙ্কটির মাঝে কতগুলি শূন্য আছে ?

8. 3^{-16}-এর তুল্যমান দশমিকটির প্রথম সার্থক অঙ্কটির অবস্থান নির্ণয় কর।

9. $\log 2 = \cdot30103$, $\log 3 = \cdot47712$ এবং $\log 7 = \cdot84509$ হইলে, দেখাও যে, $(\frac{28}{27})^{100}$, 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

10. $\log 63374 = 4\cdot8019111$ এবং $\log 63375 = 4\cdot8019180$ হইলে, $\log 533\cdot743$-এর মান কত ?

কোন্ সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 1·8019136 ?

11. $\log 37\cdot203 = 1\cdot5705780$ এবং $\log 1915631 = 6\cdot2823120$ হইলে, 372·03, 37·203, 3·7203 এবং ·0037203-এর গুণফল নির্ণয় কর।

12. $\log_{10} 165 = 2\cdot2175$ এবং $\log_{10} 6974 = 3\cdot8435$ হইলে, $\sqrt[5]{\cdot00000165}$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

13. $\log_{10}2 = \cdot3010$ এবং $\log_{10}e = \cdot4343$ হইলে, $y = ke^{-0\cdot038t}$ সূত্র হইতে, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত 't'-এর মান নির্ণয় কর, যখন $y = \frac{1}{2}k$.

14. 789·45-এর অষ্টম মূল নির্ণয় কর।

15. 1129-এর অষ্টাদশমূল নির্ণয় কর।

16. লগ-তালিকার সাহায্যে আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর

$$2\cdot41 \times (1\cdot78)^{\frac{1}{2}} \div (0\cdot24)^{\frac{1}{2}}.$$ [C.P.U.]

17. $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$ এবং

$\log 25\cdot 9569 = 5\cdot 4142524$ (আসন্ন সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত)

হইলে, $\left\{\dfrac{(\cdot 32)^3 \times (625)^4}{(\cdot 00432)^2 \times (\cdot 3124)^3 \times 25}\right\}^{\frac{1}{5}}$-এর মান নির্ণয় কর।

18. মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{36\cdot 21}}$. (ii) $\dfrac{5\cdot 631 \times 42\cdot 13 \times \cdot 2783}{2\cdot 451 \times \cdot 8392 \times 12\cdot 61}$.

(iii) $\sqrt[3]{\left\{\dfrac{294 \times 125}{42 \times 32}\right\}^2}$. (iv) $\sqrt[7]{\left\{\dfrac{294 \times 425}{142 \times 324}\right\}^2}$.

19. লগ-তালিকার সাহায্যে, দেখাও যে,

$750\{1 - (1\cdot 065)^{-12}\} = 397\cdot 55$ (প্রায়)।

20. $\log 101 = 2\cdot 0043214$ এবং $\log 111\cdot 5675 = 2\cdot 0475354$ হইলে, $\dfrac{101}{100} + \left(\dfrac{101}{100}\right)^2 + \left(\dfrac{101}{100}\right)^3 + \cdots\cdots$ দশম পদ পর্যন্ত শ্রেণীটির মান নির্ণয় কর।

21. $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$, $\log 5 = \cdot 64897$ এবং $\log 7 = \cdot 84510$ ধরিয়া সমাধান কর :

(i) $2^x . 3^{2x} = 100$. (ii) $5^{5-3x} = 2^{x+2}$ [W.B.B.H.S.]

(iii) $6^{3-4x} . 4^{x+5} = 8$. (iv) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$.

22. log 2, log 3, ইত্যাদির মান ব্যবহার করিয়া সমাধান কর :

(i) $2^x = 3^y$, $2^{y+1} = 3^{x-1}$. (ii) $2^x 7^y = 80000$, $3^y = 500$.

23. তালিকা হইতে মান নির্ণয় কর :

(i) sin 37°37′. (ii) cos 48°29′. (iii) tan 21°45′.

(iv) cot 53°56′. (v) sec 45°18.′ (vi) cosec 67°29′.

(vii) log sin 38°23′. (viii) L cos 41°34′.

(ix) L tan 35°24′. (X) L cot 51°47′.

(xi) L sec 73°29′. (xii) L cosec 41°35′.

24. (i) প্রদত্ত sin 54°32′ = ·81446 এবং sin 54°33′ = ·81462 ; sin 54°32′48″-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) প্রদত্ত $\cos 53^\circ 17' = \cdot 5257191$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2474$; $\cos 58^\circ 17' 20''$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) প্রদত্ত $L \sin 37^\circ 43' 50'' = 9 \cdot 7867152$ এবং

$$L \sin 37^\circ 44' = 9 \cdot 7867424 ;$$

$L \sin 37^\circ 43' 56''$-এর মান নির্ণয় কর।

(iv) $\cos 65^\circ 28' = \cdot 41522$ এবং $\cos 65^\circ 29' = \cdot 41496$ হইলে, এরূপ একটি কোণ নির্ণয় কর, যাহার cosine $= \cdot 41506$.

(v) দেওয়া আছে, $L \tan 56^\circ 25' 30'' = 10 \cdot 17799$ এবং $L \tan 57^\circ 25' 40'' = 10 \cdot 17804$; এরূপ কোণ নির্ণয় কর, যাহার $L \tan = 10 \cdot 17801$.

25. (i) $\sin \theta = 6$ হইলে, θ-এর মান নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে, $\log 6 = \cdot 77815$, $L \sin 36^\circ 53' = 9 \cdot 77802$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর 17.)

(ii) $\dfrac{\sin 34^\circ 17' \times \cos 77^\circ 23'}{\tan 27^\circ 12'}$-এর মান নির্ণয় কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের ধর্ম

(Properties of Triangles)

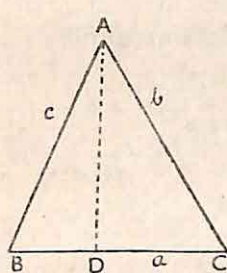
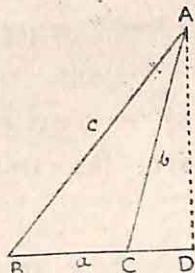
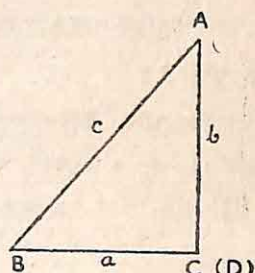
13·1. প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোন এই ছয়টি অংশ আছে। এই অংশ ছয়টি পরস্পর নিরপেক্ষ নহে। ABC ত্রিভুজের BAC, CBA এবং ACB কোণত্রয়কে যথাক্রমে A, B ও C এবং উহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে অর্থাৎ BC, CA ও AB বাহুত্রয়কে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$, অর্ধ-পরিসীমাকে s, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধকে R এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করা হয়।

ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ; অর্থাৎ $A+B+C=\pi$.

13·2. সাইন-সূত্র (**Sine Rule**) ঃ

ত্রিভুজের বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী

অর্থাৎ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ ; প্রথম চিত্রে C একটি সূক্ষ্মকোণ, দ্বিতীয় চিত্রে C

(i) (ii) (iii)

একটি স্থূলকোণ এবং তৃতীয় চিত্রে C একটি সমকোণ। A হইতে BC-এর উপর [চিত্র (i)-এ], অথবা BC-এর বর্ধিতাংশের উপর [চিত্র (ii)-এ] AD লম্ব টান।

এখন যে-কোন চিত্রের ABD ত্রিভুজ হইতে,

$$AD=AB\,.\,\frac{AD}{AB}=AB.\ \sin\ \angle ABD=c\ \sin B\ ;$$

চিত্র (i)-এর ACD ত্রিভুজ হইতে,

$$AD = AC \cdot \frac{AD}{AC} = AC.\ \sin\ \angle ACD = b\ \sin\ C\ ;$$

এবং চিত্র (ii)-এর ACD ত্রিভুজ হইতে,

$$AD = AC\ .\ \frac{AD}{AC} = AC.\ \sin\ \angle ACD = b\ \sin\ (\pi - C) = b\ \sin\ C.$$

$$\therefore\quad b\ \sin\ C = c\ \sin\ B,\ \text{অর্থাৎ}\ \frac{b}{\sin\ B} = \frac{c}{\sin\ C}.$$

অনুরূপভাবে, B হইতে CA-এর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{a}{\sin\ A} = \frac{c}{\sin\ C}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin\ A} = \frac{b}{\sin\ B} = \frac{c}{\sin\ C}.$$

চিত্র (iii)-এ, C-কোণ সমকোণ বলিয়া,

$$\sin\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c},\ \ \sin\ B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}\ \text{এবং}\ \sin\ C = \sin\ 90^\circ = 1.$$

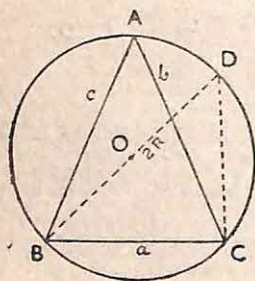
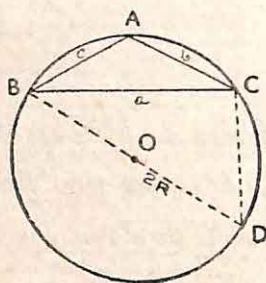
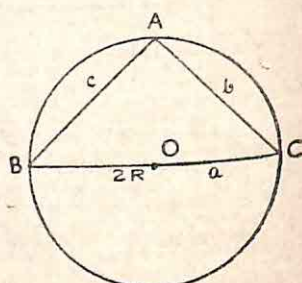
$$\therefore\quad \frac{a}{\sin\ A} = c,\ \frac{b}{\sin\ B} = c\ \text{এবং}\ c = \frac{c}{1} = \frac{c}{\sin\ C}.$$

সুতরাং $\dfrac{a}{\sin\ A} = \dfrac{b}{\sin\ B} = \dfrac{c}{\sin\ C}$

অর্থাৎ ত্রিভুজের বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী।

বিকল্প পদ্ধতি :

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R.

চিত্র (I)-এ, A কোণ সূক্ষ্মকোণ ; চিত্র (II)-এ A-কোণ স্থূলকোণ এবং চিত্র (III)-এ A-কোণ সমকোণ।

(I) (II) (III)

BO-কে যুক্ত করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। CD যুক্ত কর।

চিত্র (I) এবং (II)-এ, $BO = R$, $BD = 2R$ এবং $\angle BCD = 90^\circ$;

BCD ত্রিভুজ হইতে, $\sin \angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$. … … (1)

চিত্র (I)-এ, $\angle BDC = \angle BAC = A$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া);

চিত্র (II)-এ, $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - A$ (কারণ ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)।

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে, $\sin BDC = \sin A$.

সুতরাং (1) হইতে, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, অর্থাৎ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

চিত্র (III)-এ, A-কোণ সমকোণ বলিয়া, O বিন্দু BC-এর উপর অবস্থিত এবং $BC = 2R$, অর্থাৎ $a = 2R$.

$\therefore$ $\sin A = \sin 90^\circ = 1 = \dfrac{a}{2R}$; অর্থাৎ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

সুতরাং সকল ক্ষেত্রেই, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

অনুরূপভাবে, AO এবং CO বর্ধিত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

টীকা : $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$;

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

13·3. কোসাইন-সূত্র (Cosine Rule) :

ত্রিভুজের কোণগুলির কোসাইনকে বাহুগুলির মাধ্যমে প্রকাশ :

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, অর্থাৎ $\mathbf{\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$.

$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B}$, অর্থাৎ $\mathbf{\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}$.

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$, অর্থাৎ $\mathbf{\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$.

অনুচ্ছেদ 13·2-এর চিত্র (i) (ii) ও (iii) দ্রষ্টব্য।

C-কোণ সূক্ষ্মকোণ হইলে [চিত্র (i)], জ্যামিতির নিয়মানুসারে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.\ CD.$$

$$\therefore\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a.\ AC.\ \frac{CD}{AC}$$ [ত্রিভুজ ACD হইতে]

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

পুনরায়, C-কোণ স্থূলকোণ হইলে [চিত্র (ii)], জ্যামিতির নিয়মানুসারে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.\ CD.$$

$$\therefore\quad c^2 = a^2 + b^2 + 2a.AC.\ \frac{CD}{AC}$$ [ত্রিভুজ ACD হইতে]

$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle ACD = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - C)$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

আবার, C-কোণ সমকোণ হইলে [চিত্র (iii)], পীথাগোরাসের উপপাদ্য হইতে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2.$$

$$\therefore\quad c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\ 0$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

সুতরাং, C-কোণের মান যাহাই হউক না কেন,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, অর্থাৎ $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

টীকা : $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R}.\ \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \dfrac{abc}{R}.\ \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

এবং $\tan C = \dfrac{abc}{R}.\ \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$.

13·4. ABC ত্রিভুজে, $\mathbf{a = b \cos C + c \cos B}$;

$\mathbf{b = c \cos A + a \cos C}$;

$\mathbf{c = a \cos B + b \cos A}$.

অনুচ্ছেদ 13·2-এ চিত্র (i), (ii) ও (iii) দ্রষ্টব্য।

C-কোণ সূক্ষ্মকোণ হইলে, চিত্র (i) হইতে,

$$\text{BC}=\text{BD}+\text{CD}=\text{AB}.\ \frac{\text{BD}}{\text{AB}}+\text{AC}.\ \frac{\text{CD}}{\text{AC}}$$

$$=\text{AB}\cos\angle\text{ABD}+\text{AC}\cos\angle\text{ACD}.$$

$\therefore\ a=c\cos\text{B}+b\cos\text{C}.$

পুনরায়, C-কোণ স্থূলকোণ হইলে, চিত্র (ii) হইতে,

$$\text{BC}=\text{BD}-\text{CD}=\text{AB}.\ \frac{\text{BD}}{\text{AB}}-\text{AC}.\ \frac{\text{CD}}{\text{AC}}$$

$$=\text{AB}\cos\angle\text{ABD}-\text{AC}\cos\angle\text{ACD}.$$

$\therefore\ a=c\cos\text{B}-b\cos(\pi-\text{C})=c\cos\text{B}+b\cos\text{C}.$

আবার, C-কোণ সমকোণ হইলে, চিত্র (iii) হইতে,

$$\text{BC}=\text{AB}.\ \frac{\text{BC}}{\text{AB}}=\text{AB}\cos\angle\text{ABC}.$$

$\therefore\ a=c\cos\text{B}=c\cos\text{B}+b\cos\text{C}\ [\because\ \cos\text{C}=\cos 90^\circ=0\ ].$

সুতরাং, C-কোণের মান যাহাই হউক না কেন,

$$a=b\cos\text{C}+c\cos\text{B}.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

টীকা: 13·2, 13·3 ও 13·4 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নহে। ইহাদের যে-কোন একটি হইতে অপর সূত্রগুলি প্রমাণ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ,

$$b^2+c^2-a^2=b.b+c.c-a.a$$

$$=b(c\cos\text{A}+a\cos\text{C})+c(a\cos\text{B}+b\cos\text{A})$$

$$-a(b\cos\text{C}+c\cos\text{B})$$

$$=2bc\cos\text{A}\ \text{অর্থাৎ}\ \cos\text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

ইহা 13·3 অনুচ্ছেদে পাওয়া গিয়াছে।

13·5. ত্রিভুজের বাহুগুলির মাধ্যমে অর্ধকোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয়:

সূত্র হইতে, $2\sin^2\frac{\text{A}}{2}=1-\cos\text{A}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

এক্ষণে, ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $=s$ হইলে, $2s=a+b+c$.

$$\therefore\quad a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c).$$

সুতরাং $2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(s-b).\ 2(s-c)}{2bc}$

অথবা, $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

অর্থাৎ $\mathbf{\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}$.

বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক মানটি লইতে হইবে ; কারণ ত্রিভুজের যে-কোন কোণ A, 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $\frac{1}{2}A<90°$; সুতরাং $\sin\frac{1}{2}A$ ধনাত্মক হইবে।

অনুরূপভাবে, $\mathbf{\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}}$

এবং $\mathbf{\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}$.

পুনরায়, $2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)}{2bc}=\frac{2s(2s-2a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}.$$

$\therefore\quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$, অর্থাৎ $\mathbf{\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$

এখানেও বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক মানটি লইতে হইবে ; কারণ $\frac{1}{2}A<90°$ বলিয়া $\cos\frac{1}{2}A$ ধনাত্মক।

অনুরূপভাবে, $\mathbf{\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}}$ এবং $\mathbf{\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}}$.

আবার, $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$

অনুরূপভাবে, $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

এবং $\tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$

টীকা : $\sin A=2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A=2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

অনুরূপভাবে, $\sin B=\dfrac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

10·6. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$; BC বাহুর উপর AD লম্ব টান।

$\triangle ABD$ হইতে, $AD=AC.\dfrac{AD}{AC}=b\sin C.$

এক্ষণে, $\triangle=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}BC.AD$

$=\frac{1}{2}ab\sin C.$

অনুরূপভাবে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

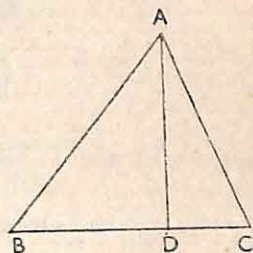
$\triangle=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$

$\therefore\ \triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}$ (দুইটি বাহুর গুণফল) $\times$ (অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন)।

পুনরায়, $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}A$

$$=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ বসাইলে,

$$\Delta=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}.$$

আবার, $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$.

টীকা : (i) $\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$, $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$, $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$.

(ii) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-a)}$.

$\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-b)}$,

$\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}=\frac{\Delta}{s(s-c)}$.

(iii) $R=\frac{abc}{4\Delta}$.

13·7. ট্যান্জেন্ট-সূত্র (Tangent Rule) :

যে-কোন ত্রিভুজ ABC-তে, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$;

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2};$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, যে-কোন ত্রিভুজে, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

অথবা, $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$
$$=\cot\frac{1}{2}(B+C)\tan\frac{1}{2}(B-C)$$
$$=\cot(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}A)\tan\frac{1}{2}(B-C) \qquad [\because \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}(B+C)=\tfrac{1}{2}\pi]$$
$$=\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}(B-C).$$

$$\therefore \quad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{2}A}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

13·8. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে, প্রমাণ কর যে,

$a\cos\frac{1}{2}(B-C)=(b+c)\sin\frac{1}{2}A.$ [W.B.B.H.S.]

ABC ত্রিভুজে, $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

$$\therefore \quad \frac{b+c}{a}=\frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R\sin A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}\quad [\because \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}(B+C)=\tfrac{1}{2}\pi]$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

$\therefore \quad a\cos\frac{1}{2}(B-C)=(b+c)\sin\frac{1}{2}A.$

উদাহরণ 2. যে-কোন ত্রিভুজ ABC-তে, প্রমাণ কর যে,

$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$ [W.B.B.H.S.]

ABC ত্রিভুজে, $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=2R\sin A\sin(B-C)+2R\sin B\sin(C-A)$
$+2R\sin C\sin(A-B)$

$=2R[\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)$
$+\sin(A+B)\sin(A-B)]$

$[\because A+B+C=\pi]$

$=2R[\sin^2B-\sin^2C+\sin^2C-\sin^2A+\sin^2A-\sin^2B]$

$=2R\times 0=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 7 সে.মি., 5 সে.মি. এবং 3 সে.মি.। দেখাও যে, বৃহত্তম কোণটি 120°. [B. U. Ent.]

ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণই বৃহত্তম। সুতরাং $a=7$, $b=5$, $c=3$ হইলে বৃহত্তম কোণটি হইবে A.

এখন, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2.5.3}=\dfrac{25+9-49}{30}$

$=-\frac{15}{30}=-\frac{1}{2}=-\cos 60^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=\cos 120^\circ.$

$\therefore$ $A=120^\circ$, অর্থাৎ বৃহত্তম কোণটি 120°.

উদাহরণ 4. ABC ত্রিভুজের $A=60^\circ$ হইলে, দেখাও যে,

$$b+c=2a\cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

ABC ত্রিভুজে, $b=c\cos A+a\cos C$ এবং $c=a\cos B+b\cos A$.

$\therefore$ $b+c=(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)$

$=a(\cos B+\cos C)+(b+c)\cos A$

$=a.2\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)+(b+c)\cos 60^\circ$

$=2a\cos 60^\circ\cos\frac{1}{2}(B-C)+(b+c).\frac{1}{2}$

$[\because\ B+C=180^\circ-A=120^\circ]$

অথবা, $(b+c)-\frac{1}{2}(b+c)=2a.\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(B-C)$

অথবা, $\frac{1}{2}(b+c)=a\cos\frac{1}{2}(B-C)$

অথবা, $b+c=2a\cos\frac{1}{2}(B-C)$.

উদাহরণ 5. ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

$$bc\cos^2\tfrac{1}{2}A+ca\cos^2\tfrac{1}{2}B+ab\cos^2\tfrac{1}{2}C=s^2.$$

বামপক্ষ $=bc.\dfrac{s(s-a)}{bc}+ca.\dfrac{s(s-b)}{ca}+ab.\dfrac{s(s-c)}{ab}$

$=s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)$

$=s(s-a+s-b+s-c)=s\{3s-(a+b+c)\}.$

$=s(3s-2s)=s\,.\,s=s^2=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 6. $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{3}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে, $C=60^\circ$.

এক্ষণে, $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{a+b+c}$

অথবা, $\left(\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+b+c}\right)+\left(\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{a+b+c}\right)=\dfrac{1}{a+b+c}$

অথবা, $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}=1$

অথবা, $a(c+a)+b(b+c)=(b+c)(c+a)$

অথবা, $ac+a^2+b^2+bc=bc+c^2+ab+ac$

অথবা, $a^2+b^2-c^2=ab$

অথবা, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$

অথবা, $\cos C=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$.

$\therefore\ C=60^\circ$.

উদাহরণ 7. a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\cot\frac{1}{2}A, \cot\frac{1}{2}B, \cot\frac{1}{2}C$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\cot\frac{1}{2}A, \cot\frac{1}{2}B, \cot\frac{1}{2}C$-কে সমান্তর শ্রেণী গঠন করিতে হইলে,

$$\cot\tfrac{1}{2}B-\cot\tfrac{1}{2}A=\cot\tfrac{1}{2}C-\cot\tfrac{1}{2}B$$

অর্থাৎ $\dfrac{s(s-b)}{\triangle}-\dfrac{s(s-a)}{\triangle}=\dfrac{s(s-c)}{\triangle}-\dfrac{s(s-b)}{\triangle}$

অর্থাৎ, $(s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$

অর্থাৎ, $a-b=b-c$

অর্থাৎ, যদি a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকে।

উদাহরণ 8. দেখাও যে, $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=4\triangle$.

বামপক্ষ $=a^2.2\sin B\cos B+b^2.2\sin A\cos A$

$=2a\sin B.a\cos B+2b\sin A.b\cos A$

$=2a\sin B\,(a\cos B+b\cos A)$ $[\because a\sin B=b\sin A]$

$=2a\sin B.c=4.\frac{1}{2}c.a\sin B=4\triangle=$ ডানপক্ষ।

প্রশ্নমালা XIII (A)

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর (**1—20**):

1. $(b-c)\cos\frac{1}{2}A=a\sin\frac{1}{2}(B-C)$ [W.B.B.H.S.]
2. $a\sin(\frac{1}{2}A+C)=(b+c)\sin\frac{1}{2}A$. [W.B.B.H.S.]
3. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$.
4. $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$ $+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0$.
5. (i) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$.

   (ii) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$.

6. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

7. $a\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(B-C)+b\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(C-A)$
$+c\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(A-B)=0.$

8. $\dfrac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\dfrac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\dfrac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0.$

9. (i) $a^2\sin(B-C)\operatorname{cosec}A+b^2\sin(C-A)\operatorname{cosec}B$
$+c^2\sin(A-B)\operatorname{cosec}C=0.$

(ii) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$

10. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$

11. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c.$

12. $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$

13. (i) $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}.$

(ii) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{a}{bc}=\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{b}{ca}=\dfrac{\cos C}{c}+\dfrac{c}{ab}.$

14. $(s-a)\tan\frac{1}{2}A=(s-b)\tan\frac{1}{2}B=(s-c)\tan\frac{1}{2}C.$

15. $(c+a)\tan\frac{1}{2}(C-A)=(c-a)\tan\frac{1}{2}(C+A).$

16. (i) $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0.$

(ii) $\dfrac{b^2-c^2}{a}\cos A+\dfrac{c^2-a^2}{b}\cos B+\dfrac{a^2-b^2}{c}\cos C=0.$

17. $\dfrac{(b^2-c^2)\sin B\sin C}{\sin(B-C)}=2\triangle.$

18. (i) $a^2+b^2+c^2=4\triangle(\cot A+\cot B+\cot C).$

(ii) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\triangle.$

(iii) $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\triangle.$

19. (i) $a\sin B\sin C+b\sin C\sin A+c\sin A\sin B=\dfrac{3\triangle}{R}.$

(ii) $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\dfrac{abc}{4R^2}.$

20. $(a^2\operatorname{cosec}A+b^2\operatorname{cosec}B+c^2\operatorname{cosec}C)\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C=\triangle.$

21. ABC ত্রিভুজে $a=2b$ এবং $A=3B$ হইলে, ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর।

22. (i) $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ হইলে, দেখাও যে, $C=60°$.

(ii) $a^4+b^4+c^4=2a^2(b^2+c^2)$ হইলে, দেখাও যে, $A=45°$ বা $135°$.

23. (i) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু 13 সে. মি., 8 সে. মি.এবং 7 সে. মি. ; দেখাও যে, বৃহত্তম কোণটি 120°.

(ii) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু 8 সে. মি., 15 সে. মি., 17 সে. মি. ; দেখাও যে, বৃহত্তম কোণটি 90°. [C.P.U.]

24. দেখাও যে, 20 সে. মি., 21 সে. মি. এবং 29 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজটি সমকোণী। [W.B.B.H.S.]

25. (i) ABC ত্রিভুজে $\cos A=\dfrac{\sin B}{2\sin C}$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

(ii) ABC ত্রিভুজে $\dfrac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

(iii) ABC ত্রিভুজে, $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী। [W.B.B.H.S.]

26. ABC ত্রিভুজে, $\cos A:\cos B=b:a$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

27. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 এবং উহার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে. মি.। ত্রিভুজটির বাহুগুলি নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

28. 13 সে. মি., 14 সে. মি. এবং 15 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

29. ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,

$$a\cos^2\tfrac{1}{2}B+b\cos^2\tfrac{1}{2}A=\tfrac{3}{2}c.$$

30. a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, $\cot A, \cot B, \cot C$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

31. $\dfrac{\sin A}{3}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{4}$ হইলে, দেখাও যে, $\cos C=\frac{1}{9}$.

32. (i) $2a=b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$2\cot\tfrac{1}{2}A=\cot\tfrac{1}{2}B+\cot\tfrac{1}{2}C.$$

(ii) $3a=b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C=2.$

13·9. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ :

পূর্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

পুনরায়, $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{abc}{2bc\sin A}=\dfrac{abc}{4\triangle}.$

13·10. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ :

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** বা **অন্তর্লিখিত বৃত্ত** (inscribed circle) বলে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) এবং উহার ব্যাসার্ধকে **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (In-radius) বলে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I এবং উহার ব্যাসার্ধ r.

মনে কর, অন্তর্বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

ID, IE এবং IF যথাক্রমে BC, CA এবং AB-এর উপর লম্ব এবং

$$ID=IE=IF=r.$$

IA, IB ও IC যুক্ত করা হইল।

এখন, $\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$$=\tfrac{1}{2}BC.ID+\tfrac{1}{2}CA.IE+\tfrac{1}{2}AB.IF$$

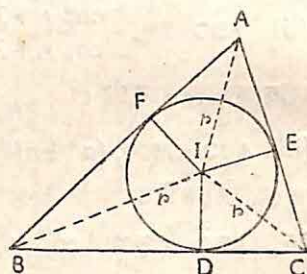
$$=\tfrac{1}{2}(ar+br+cr)=\tfrac{1}{2}r(a+b+c)=rs$$

[$\because$ $s=$ ABC ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $=\frac{1}{2}(a+b+c)$]

সুতরাং $\triangle=rs$ অর্থাৎ $r=\dfrac{\triangle}{s}.$

পুনরায়, $a=BC=BD+DC=ID.\dfrac{BD}{ID}+ID.\dfrac{DC}{ID}$

$$=r\cot\tfrac{1}{2}B+r\cot\tfrac{1}{2}C$$ [$\triangle IBD$ ও $\triangle ICD$ হইতে]

$$=r\left[\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right]$$

$$=\frac{r(\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{r\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}=\frac{r\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$[\because \quad \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\pi]$$

$$=\frac{r\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

$$\therefore \quad r=\frac{a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{2R\sin A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

[13·2 অনুচ্ছেদ হইতে]

$$\therefore \quad \mathbf{r=4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}.$$

আবার, $r=\frac{\triangle}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

$$=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{r=(s-a)\tan\tfrac{1}{2}A}.$$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{r=(s-b)\tan\frac{1}{2}B}$; $\mathbf{r=(s-c)\tan\frac{1}{2}C}$.

টীকা ঃ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে অন্তঃকেন্দ্রের দূরত্ব

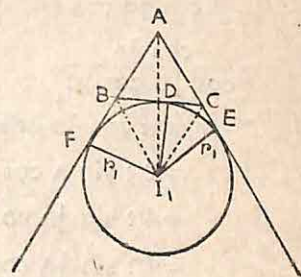
ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে অন্তঃকেন্দ্রের দূরত্বগুলি হইল যথাক্রমে IA, IB ও IC.

এখন $\triangle IAF$ হইতে, $\mathbf{IA}=IF.\frac{IA}{IF}=IF\ \text{cosec}\ IAF=\mathbf{r\ cosec\ \frac{1}{2}A}$.

অনুরূপভাবে, $\mathbf{IB=r\ cosec\ \frac{1}{2}B}$ এবং $\mathbf{IC=r\ cosec\ \frac{1}{2}C}$.

13·11. ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধ ঃ

কোন ত্রিভুজের যে-কোন এক বাহু এবং অপর দুই বাহুর বর্দ্ধিতাংশকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Ex-circle) বা **বহির্লিখিত বৃত্ত** (Escribed circle) বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের এরূপ তিনটি বহির্বৃত্ত হয়। ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে এবং AB ও AC বাহুর বর্দ্ধিতাংশকে যে-বৃত্ত স্পর্শ করে, সেই বৃত্তকে A-কোণের বিপরীত বহির্বৃত্ত বলে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A-কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1, এবং ব্যাসার্ধ r_1 ; বৃত্তটি BC বাহুকে D-বিন্দুতে এবং AC ও AB বাহুর বর্দ্ধিতাংশকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে। I_1D, I_1E এবং I_1F যথাক্রমে BC, AC-এর বর্দ্ধিতাংশের উপর এবং AB-এর বর্দ্ধিতাংশের উপর লম্ব।

একক্ষণে, $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$.

I_1A, I_1B ও I_1C যুক্ত করা হইল।

সুতরাং $\triangle ABC = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - \triangle I_1BC$

$= \frac{1}{2} I_1F . AB + \frac{1}{2} I_1E . AC - \frac{1}{2} I_1D . BC$

$= \frac{1}{2} r_1 . c + \frac{1}{2} r_1 . b - \frac{1}{2} r_1 . a$

$= \frac{1}{2} r_1 (b + c - a) = \frac{1}{2} r_1 (2s - 2a) = r_1 (s - a)$.

[$\because$ s = ABC ত্রিভুজের অর্ধ-পরিসীমা $= \frac{1}{2}(a + b + c)$]

$\therefore \quad \triangle = r_1(s - a)$, অর্থাৎ $\mathbf{r_1 = \dfrac{\triangle}{s - a}}$.

অনুরূপভাবে, B ও C কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_2 এবং r_3 হইলে,

$$\mathbf{r_2 = \frac{\triangle}{s - b}} \text{ এবং } \mathbf{r_3 = \frac{\triangle}{s - c}}.$$

পুনরায়, $a = BC = BD + CD = I_1D . \dfrac{BD}{I_1D} + I_1D . \dfrac{CD}{I_1D}$

$= r_1 \cot I_1BD + r_1 \cot I_1CD$ [$\triangle I_1BD$ ও $\triangle I_1CD$ হইতে]

$= r_1 [\cot \frac{1}{2}(\pi - B) + \cot \frac{1}{2}(\pi - C)]$

$= r_1 [\cot (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}B) + \cot (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}C)]$

$= r_1 [\tan \frac{1}{2}B + \tan \frac{1}{2}C] = r_1 \left[\dfrac{\sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}B} + \dfrac{\sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}C}\right]$

$= r_1 \dfrac{\sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C} = r_1 \dfrac{\sin (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$

$= r_1 \dfrac{\sin (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A)}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$ [$\because$ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\pi$]

$= \dfrac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$.

$\therefore \quad r_1 = a \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \sec \frac{1}{2}A$

$= 2R \sin A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \sec \frac{1}{2}A$

$= 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \sec \frac{1}{2}A$

$= 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$.

অনুরূপভাবে, $r_2 = 4R \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$

এবং $r_3 = 4R \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$.

আবার, $r_1 = \frac{\triangle}{s-a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$

$$= s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$\therefore\ \mathbf{r_1 = s \tan \tfrac{1}{2}A}.$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{r_2 = s \tan \tfrac{1}{2}B}$ এবং $\mathbf{r_3 = s \tan \tfrac{1}{2}C}$.

টীকা ঃ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বহিঃকেন্দ্রের দূরত্ব

$\triangle AI_1F$ হইতে, $I_1A = I_1F.\frac{I_1A}{I_1F} = I_1F \operatorname{cosec} I_1AF$

$$= r_1 \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A = 4R \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C.$$

$\triangle BI_1F$ হইতে, $I_1B = I_1F.\frac{I_1B}{I_1F} = I_1F \operatorname{cosec} I_1BF$

$$= r_1 \operatorname{cosec} (90^\circ - \tfrac{1}{2}B) = r_1 \sec \tfrac{1}{2}B.$$

অনুরূপভাবে, $I_1C = r_1 \sec \frac{1}{2} C$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$I_2A = r_2 \sec \frac{1}{2}A$; $I_2B = r_2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}B$; $I_2C = r_2 \sec \frac{1}{2}C$

এবং $I_3A = r_3 \sec \frac{1}{2}A$; $I_3B = r_3 \sec \frac{1}{2}B$; $I_3C = r_3 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C$.

13·12. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে, $4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = \frac{s}{R}$.

$$\text{বামপক্ষ} = 4.\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}.\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$= \frac{4s}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{4s}{abc}.\triangle$$

$$= s.\frac{4\triangle}{abc} = \frac{s}{R} = \text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = s^2$.

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b} + \frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c} + \frac{\triangle}{s-c}\cdot\frac{\triangle}{s-a}$$

$$= \frac{\triangle^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}(s-c+s-a+s-b)$$

$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\{3s-(a+b+c)\}$$

$$= s(3s-2s) = s.s = s^2 = \text{ডানপক্ষ।}$$

উদাহরণ 3. ABC ত্রিভুজে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}. \qquad \text{[B.U. Ent.]}$$

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+1-2\sin^2\frac{1}{2}C$

$=1+2\cos(90^\circ-\frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}(A-B)-2\sin\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}C$

$[\because A+B+C=180^\circ]$

$=1+2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)-2\sin\frac{1}{2}C.\sin\{90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\}$

$=1+2\sin\frac{1}{2}C\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B)\}$

$=1+2\sin\frac{1}{2}C.2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$

$=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C=1+\frac{r}{R}=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 4. কোন ত্রিভুজে $r=r_1-r_2-r_3$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

ত্রিভুজটিতে $r=r_1-r_2-r_3$

অথবা, $r_2+r_3=r_1-r$

অথবা, $\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}=\frac{\Delta}{s-a}-\frac{\Delta}{s}$

অথবা, $\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}$

অথবা, $\frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)}=\frac{s-s+a}{s(s-a)}$

অথবা, $\frac{2s-b-c}{(s-b)(s-c)}=\frac{a}{s(s-a)}$

অথবা, $\frac{a}{(s-b)(s-c)}=\frac{a}{s(s-a)}$ $\qquad [\because 2s=a+b+c]$

অথবা, $\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}=1$

অথবা, $\tan^2\frac{1}{2}A=1$

অথবা, $\tan\frac{1}{2}A=1$ $\qquad$ ($\because$ $\frac{1}{2}A$ সর্বদা সূক্ষ্মকোণ হইবে)

$\therefore$ $\frac{1}{2}A=45^\circ$, অর্থাৎ $A=90^\circ$.

সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী।

প্রশ্নমালা XIII (B)

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর (1—16) :

1. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

2. $r_1+r_2+r_3=r+4R$.

3. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_2}+\frac{a-b}{r_3}=0$.

4. $\frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{ca-r_3r_1}{r_2}=\frac{ab-r_1r_2}{r_3}$.

5. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$.

6. $\sqrt{rr_1r_2r_3}=\triangle=r^2 \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$.

7. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}$.

8. $\cos B+\cos C-\cos A=\frac{r_1}{R}-1$.

9. $a \cos B \cos C+b \cos C \cos A+c \cos A \cos B=\frac{\triangle}{R}$.

10. $a \cot A+b \cot B+c \cot C=2(R+r)$.

11. $\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)(s-a)}=\frac{1}{r^2}$.

12. $a^2b^2c^2 (\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=32\triangle^3$. [C. P. U.]

13. $4\left(\frac{s}{a}-1\right)\left(\frac{s}{b}-1\right)\left(\frac{s}{c}-1\right)=\frac{r}{R}$. [C. P. U.]

14. $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)=\frac{4R}{r^2s^2}$.

15. $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$.

16. $\frac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}=4R$.

17. ABC ত্রিভুজে $a=13$ সে. মি., $b=14$ সে. মি., $c=15$ সে. মি. হইলে, r ও R-এর পরিমাপ নির্ণয় কর।

18. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5 সে.মি., 8 সে.মি. এবং 5 সে.মি.। প্রমাণ কর যে, উহার দুইটি বহির্বৃত্ত সমান।

19. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 60 বর্গ সে.মি.। বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি যথাক্রমে 5 সে.মি., 12 সে. মি. এবং 20 সে.মি. হইলে, ত্রিভুজের বাহুগুলি নির্ণয় কর।

20. a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, r_1, r_2, r_3 বিপরীত শ্রেণীভুক্ত।

21. কোন ত্রিভুজে $3R = 4r$ হইলে, দেখাও যে,

$$4(\cos A + \cos B + \cos C) = 7.$$

22. $R = 2r$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমবাহু।

23. $\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) = 2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

24. $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

25. যদি কোন ত্রিভুজের বহির্বৃত্তের ব্যাস উহার পরিসীমার সমান হয়, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

চতুর্দশ অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

(Solution of Triangles)

14·1. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ মিলিয়া মোট ছয়টি অংশ আছে। এই অংশগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নহে। ইহাদের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ আছে। সাধারণতঃ তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে ঐ পারস্পরিক সম্বন্ধগুলি হইতে অপর তিনটি অংশ নির্ণয় করা যায়। এই অংশ তিনটি নির্ণয় করাই হইল **ত্রিভুজের সমাধান** (Solution of Triangles)। ইহার ফলে ত্রিভুজটির সম্পূর্ণ বৈশিষ্ট্যই নির্ণীত হয়।

প্রদত্ত অংশ তিনটি নিম্নলিখিত রূপ হইতে পারে :

(i) তিনটি বাহু ;
(ii) তিনটি কোণ ;
(iii) দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ ;
(iv) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু ;
(v) দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

টীকা : প্রদত্ত অংশ তিনটির মধ্যে অন্ততঃ একটি বাহু থাকা আবশ্যক ; কারণ কোন একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে, ঐ কোণগুলির সমান কোণ-বিশিষ্ট অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

14·2. তিনটি বাহু প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান :

মনে কর, ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া আছে। উহার তিনটি কোণ নির্ণয় করিতে হইবে অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে।

ত্রিভুজের প্রদত্ত যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, জ্যামিতিক প্রণালীতে একটি ত্রিভুজ (এবং একটি মাত্র ত্রিভুজই) অঙ্কন সম্ভব। সুতরাং ত্রিভুজটির কোণগুলির পরিমাণও নির্দিষ্ট হইবে।

যে-কোন একটি কোণ A নির্ণয় করিতে হইলে, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

সূত্রটির প্রয়োগে cos A নির্ণয় করা যায় এবং কোসাইনের তালিকা হইতে A-এর মান নির্ণয় করা যায়। $0<A<\pi$ বলিয়া, নির্দিষ্টভাবে A-এর একটি মান পাওয়া যাইবে। অনুরূপভাবে, অপর একটি কোণ B নির্ণয় করা যায় এবং $A+B+C=\pi$ হইতে তৃতীয় কোণ C নির্ণয় করা যায়।

যদি কোনও ক্ষেত্রে cos A-এর মান কোন বিশিষ্ট কোণের কোসাইনের সহিত সমান হয়, তাহা হইলে তালিকা ব্যবহার করিবার প্রয়োজন নাই।

উচ্চতর গণিতে প্রমাণিত হইয়াছে যে, কোসাইন তালিকা অপেক্ষা লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে কোণের নিকটতর আসন্ন মান পাওয়া যায়।

সুতরাং উপরোক্ত কোসাইনের সূত্রের পরিবর্তে, প্রয়োজনবোধে ট্যানজেণ্ট-সূত্র প্রয়োগ করিয়া নিম্নের প্রদর্শিত প্রণালীর প্রয়োগই বাঞ্ছনীয়:

A-কোণটি নির্ণয় করিতে হইলে লওয়া হয়, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

উভয়পক্ষের লগারিদ্‌ম্ লইয়া 10 যোগ করিলে $L\tan\frac{1}{2}A$-এর মান পাওয়া যাইবে, অর্থাৎ $L\tan\frac{1}{2}A=10+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right\}$.

এখন ডানপক্ষকে সরল করিয়া $L\tan\frac{1}{2}A$-এর মান পাওয়া যাইবে। তৎপরে লগারিদ্‌মিক্ ট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে $\frac{1}{2}A$-এর মান পাওয়া যাইবে এবং $0<\frac{1}{2}A<\frac{1}{2}\pi$ বলিয়া $\frac{1}{2}A$-কোণের পরিমাণ মাত্র একটি হইবে। সুতরাং $\frac{1}{2}A$-কোণের পরিমাণ নির্দিষ্টরূপে পাওয়া যাইবে, অর্থাৎ A-কোণের পরিমাণ নির্দিষ্টরূপে পাওয়া যাইবে।

অনুরূপভাবে, B ও C কোণের মান পাওয়া যাইবে; অথবা B-কোণের মান নির্ণয় করিয়া $A+B+C=\pi$ হইতে C কোণের মান নির্ণয় করা যাইবে।

যদি কোনও ক্ষেত্রে $\tan\frac{1}{2}A$-এর মান কোন বিশিষ্ট কোণের ট্যানজেণ্টের মানের সহিত সমান হয়, তাহা হইলে তালিকা ব্যবহার করিবার প্রয়োজন নাই।

উদাহরণ: একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু 7, 8, 9 হইলে, ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত: $L\tan 24^\circ 5'40''=9{\cdot}6505069$, $L\tan 24^\circ 5'50''=9{\cdot}6505634$,
$L\tan 29^\circ 12'20''=9{\cdot}7474183$, $L\tan 29^\circ 12'30''=9{\cdot}7474677$,
$\log 2={\cdot}3010300$.

এখানে মনে কর, $a=7,\ b=8,\ c=9$.

$\therefore\ s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(7+8+9)=12.$

$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(12-8)(12-9)}{12(12-7)}}=\sqrt{\frac{2}{10}}.$

$\therefore \quad L\tan\frac{1}{2}A=10+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 10=10+{\cdot}1505150-{\cdot}5$
$=9{\cdot}6505150.$

এখন, $L\tan\frac{1}{2}A$ সংখ্যাটি $L\tan 24°5'40''$ এবং $L\tan 24°5'50''$-এর মধ্যবর্তী হইবে,

অর্থাৎ $\frac{1}{2}A$ কোণটি $24°5'40''$ এবং $24°5'50''$-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, $\frac{1}{2}A=24°5'40''+x''$.

অতএব, x''-এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}6505150-9{\cdot}6505069={\cdot}0000081$;

এবং $10''$-এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}6505634-9{\cdot}6505069={\cdot}0000565$.

$\therefore \quad \frac{x}{10}=\frac{81}{565}$, অর্থাৎ $x=\frac{81\times 10}{565}=1{\cdot}43''$ (প্রায়)।

$\therefore \quad \frac{1}{2}A=24°5'40''+1{\cdot}43''=24°5'41{\cdot}''43.$

$\therefore \quad A=48°11'22{\cdot}''86.$

অনুরূপভাবে, $B=58°24'42{\cdot}''7.$

$\therefore \quad C=180°-(A+B)=180°-106°36'5{\cdot}56''=73°23'54{\cdot}44''.$

14·3. তিনটি কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে ত্রিভুজের সম্পূর্ণ সমাধান সম্ভব নহে ; কারণ তিনটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ হইতে পারে। এই সমস্ত ত্রিভুজগুলি সদৃশকোণী বলিয়া সদৃশ হইবে। ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা না গেলেও $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় করা যাইবে।

সুতরাং $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$

উদাহরণ ঃ কোন ত্রিভুজের কোণত্রয়ের অনুপাত $1:2:3$; প্রমাণ কর যে, অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত $1:\sqrt{3}:2.$ [W. B. B. H. S.]

কোণগুলির অনুপাত $1:2:3$ এবং উহাদের সমষ্টি π বলিয়া, কোণগুলি হইল যথাক্রমে $\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{6}\pi, \frac{3}{6}\pi$ অর্থাৎ $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi$.

$\therefore$ অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত $=\sin\frac{1}{6}\pi:\sin\frac{1}{3}\pi:\sin\frac{1}{2}\pi$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\sqrt{3}:1$

$=1:\sqrt{3}:2.$

প্রশ্নমালা XIV (A)

1. $a=\sqrt{6}, b=2, c=\sqrt{3}+1$ হইলে, ত্রিভুজটির সমাধান কর।

2. $a=5, b=7$ এবং $c=8$ হইলে, ত্রিভুজটির সমাধান কর।
(প্রদত্ত $\cos 38^\circ 11' = \frac{11}{14}$).

3. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 3 সে.মি., 5 সে.মি. এবং 7 সে.মি.। বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

4. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় 2, 3 এবং 4 একক হইলে, ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$; $L \tan 52^\circ 14' = 10\cdot 1108395$ এবং $L \tan 52^\circ 15' = 10\cdot 1111004$.
[W. B. B. H. S.]

5. (*a*) ত্রিভুজের বাহুগুলি 130, 123 এবং 77 মিটার ; বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 38^\circ 39' = 9\cdot 9029376$,
$L \tan 38^\circ 40' = 9\cdot 9031966$. (W. B. B. H. S.)

(*b*) ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 6, 7 ; দেখাও যে, বৃহত্তম কোণটি $78^\circ 27' 46\cdot 8''$. দেওয়া আছে, $\log 6 = \cdot 7781513$, $L \cos 39^\circ 14' = 9\cdot 8890644$ এবং $1'$-এর প্রভেদ $= \cdot 0001032$. [W. B. B. H. S.]

6. ত্রিভুজের বাহুত্রয় 17, 13, 10 ; লগ-তালিকার সাহায্যে ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর।

7. ত্রিভুজের বাহুগুলি 4, 5, 6 ; প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ।

8. ত্রিভুজের বাহুগুলি 9, 10, 11 ; বাহু 10-এর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 29^\circ 30' = 9\cdot 7526420$,
$L \tan 29^\circ 29' = 9\cdot 7523472$. [W. B. B. H. S.]

9. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে 4, 5 এবং 6 মিটার। 5 মিটার দৈর্ঘ্যের বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাণ কত ?

দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$,
$L \cos 27^\circ 53' = 9\cdot 9464040$, $1'$-এর প্রভেদ $= \cdot 0000669$.

10. একটি ত্রিভুজের $a=18$, $b=20$, $c=22$; $L \tan \frac{1}{2}A$-এর মান নির্ণয় কর। (প্রদত্ত $\log 2 = \cdot 3010300$ এবং $\log 3 = \cdot 4771213$).

11. $A=30^\circ$ এবং $B=45^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$b : c = 2 : (\sqrt{3}+1).$$

12. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ 45° এবং 60°; বাহুগুলির দৈর্ঘ্যত্রয়ের তুলনা কর।

13. কোন ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণদ্বয়ের অনুপাত $2 : 5$ এবং অপর কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দেড়গুণ। ত্রিভুজের বাহুগুলির তুলনা কর।

14. কোন ত্রিভুজের কোণত্রয়ের অনুপাত $2 : 3 : 7$; অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

15. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে 40° এবং 60°; উহার বৃহত্তম বাহুটি 22 সেন্টিমিটার। ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে $L \sin 40^\circ = 9{\cdot}8080675$.

$L \sin 80^\circ = 9{\cdot}9933515$, $\log 22 = 1{\cdot}3424227$,

$\log 14359 = 4{\cdot}1571242$, 1-এর অন্তর $= {\cdot}0000302$.

16. 2 মিটার দীর্ঘ একটি তারকে তিনটি অংশে বাঁকাইয়া একটি ত্রিভুজ বানান হইল। ত্রিভুজটির দুইটি কোণ 35° এবং 60° হইলে, আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(প্রদত্ত $\sin 35^\circ = {\cdot}5736$, $\sin 60^\circ = {\cdot}8660$ এবং $\sin 85^\circ = {\cdot}9962$).

14·4. দুইটি বাহু এবং উহার অন্তর্ভুর্ত কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান ঃ

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ C দেওয়া আছে। উহার অপর দুইটি কোণ A, B এবং তৃতীয় বাহু c নির্ণয় করিতে হইবে, অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে।

জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রদত্ত অংশগুলির সাহায্যে একটি ত্রিভুজ (এবং একটি মাত্র ত্রিভুজই) অঙ্কন সম্ভব। সুতরাং A, B এবং c-এর পরিমাণও নির্দিষ্ট হইবে।

ABC ত্রিভুজে, $A+B+C=180^\circ$ বলিয়া, $A+B=180^\circ-C$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$

এবং $\tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$.

প্রথমটি হইতে $\frac{1}{2}(A+B)$-এর মান পাওয়া যাইবে।

দ্বিতীয়টি হইতে, $L \tan \frac{A-B}{2} = 10 + \log\left(\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}\right)$

$$= \log\frac{a-b}{a+b} + L \cot \frac{C}{2}.$$

এক্ষণে, a, b ও c প্রদত্ত বলিয়া, ডানপক্ষের মান নির্ণয় করা যাইবে অর্থাৎ $L \tan \frac{1}{2}(A-B)$-এর মান পাওয়া যাইবে। তৎপরে লগারিদ্‌মিক্ ট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে $\frac{1}{2}(A-B)$-এর মান পাওয়া যাইবে।

সুতরাং $\frac{1}{2}(A+B)$ এবং $\frac{1}{2}(A-B)$ উভয়েই নির্ণীত হইল। ইহাদের যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার সাহায্যে যথাক্রমে A ও B-এর মান নির্দিষ্টরূপে পাওয়া যাইবে।

এখন A ও B এবং প্রদত্ত a ও b-এর সাহায্যে $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্রের প্রয়োগে c-এর মান পাওয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : a, b এবং C প্রদত্ত বলিয়া $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ সূত্রের সাহায্যে C-এর মান পাওয়া যাইবে ; C-এর মান পাইবার পর $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে B-এর মান পাওয়া যাইবে এবং তৎপরে $A = \{180^\circ - (B+C)\}$ হইতে A-এর মান পাওয়া যাইবে।

কিন্তু 14·2 অনুচ্ছেদে বর্ণিত কারণের জন্য ট্যানজেণ্ট সূত্রেরই সাধারণতঃ প্রয়োগ করা হয়।

টীকা : $a = b$ হইলে, $A = B$. সুতরাং $A + B + C = 2B + C = 180^\circ$ হইতে, B (=A) নির্ণীত হইবে। ইহার পর সাইনের সূত্র প্রয়োগ করিলেই c-এর মান পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ : একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 5 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 120° ; ত্রিভুজটির অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। (প্রদত্ত $\log 4{\cdot}8 = {\cdot}6812412$, $L \tan 8^\circ 12' = 9{\cdot}1586706$, 60″-এর জন্য অন্তর $= 8940$).

[B. U. Ent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $b = 5$ সে.মি., $c = 3$ সে.মি. এবং $A = 120^\circ$.

এখন, $\frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. ...(1)

আবার, $\tan \frac{1}{2}(B-C) = \frac{5-3}{5+3} \cot(\frac{1}{2}.\ 120^\circ) = \frac{1}{4}.\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{48}}$.

$$\therefore\ L \tan \frac{1}{2}(B-C) = 10 + \log\frac{1}{\sqrt{48}} = 10 + \log(48)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 10 - \frac{1}{2}\log 48 = 10 - \frac{1}{2}(1{\cdot}6812412) = 9{\cdot}1593794.$$

এখন, মানের বৃদ্ধি ·0008940 হইলে, কোণের বৃদ্ধি হয় 60″.

$\therefore$ মানের বৃদ্ধি (9·1593794 − 9·1586706) অথবা ·0007088 হইলে,

কোণের বৃদ্ধি হয় $60'' \times \frac{7088}{8940} = 48''$ (প্রায়)।

$\therefore$ $\text{L} \tan \frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}) = \text{L} \tan 8^\circ 12' 48''$.

$\therefore$ $\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}) = 8^\circ 12' 48''$. ... ... (2)

(1) ও (2) যোগ করিলে, $\text{B} = 38^\circ 12' 48''$.

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে, $\text{C} = 21^\circ 47' 12''$.

14·5. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান ঃ

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি কোণ A ও B এবং একটি বাহু a দেওয়া আছে। উহার অপর কোণটি C এবং অপর বাহু দুইটি b, c নির্ণয় করিতে হইবে ; অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে।

জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রদত্ত অংশগুলির সাহায্যে একটি মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। সুতরাং C, b ও c-এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে।

ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অর্থাৎ $\text{A}+\text{B}+\text{C}=180^\circ$.

A ও B প্রদত্ত ; সুতরাং তৃতীয় কোণটি নির্ণয় করা যাইবে।

$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}}$ সূত্রটি ব্যবহার করিয়া অপর দুইটি বাহু b ও c নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ ঃ একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ 50° ও 65°40′ এবং একটি বাহু 2·5 সে.মি. ; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\text{A}=50^\circ$, $\text{B}=65^\circ 40'$ এবং $c=2\cdot 5$ সে.মি.।

$\therefore$ $\text{A}+\text{B}=115^\circ 40'$.

আবার, $\text{A}+\text{B}+\text{C}=180^\circ$.

$\therefore$ $\text{C}=180^\circ-(\text{A}+\text{B})=180^\circ-115^\circ 40'=64^\circ 20'$.

$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}}$ সূত্র হইতে,

$a = \frac{c \sin \text{A}}{\sin \text{C}}$ এবং $b = \frac{c \sin \text{B}}{\sin \text{C}}$.

$\therefore \log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$

$= \log 2{\cdot}5 + L \sin 50^\circ - L \sin 64^\circ 20'$

$= {\cdot}39794 + 9{\cdot}88425 - 9{\cdot}95488$

$= {\cdot}32731 = \log 2{\cdot}1248,$

অর্থাৎ, $a = 2{\cdot}1248$ সে.মি. ;

এবং $\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$

$= \log 2{\cdot}5 + L \sin 65^\circ 40' - L \sin 64^\circ 20'$

$= {\cdot}39794 + 9{\cdot}95960 - 9{\cdot}95488$

$= {\cdot}40266 = \log 2{\cdot}5275$

অর্থাৎ, $b = 2{\cdot}5275$ সে.মি. ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $a = 2{\cdot}1248$ সে.মি., $b = 2{\cdot}5275$ সে.মি. এবং $C = 64^\circ 20'$.

প্রশ্নমালা XIV (B)

1. $a = 2$ সে.মি., $b = 4$ সে.মি. এবং $C = 60^\circ$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

2. $a = 21, b = 11, C = 34^\circ 42' 30''$ হইলে, A নির্ণয় কর।

   প্রদত্ত $\log 2 = {\cdot}30103$ এবং $L \tan 72^\circ 38' 45'' = 10{\cdot}50515$.

3. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 80 সে.মি. এবং 100 সে.মি., তাহাদের অন্তর্গত কোণ 60° ; অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,
$\log 3 = {\cdot}47712$, $L \tan 10^\circ 53' 36'' = 9{\cdot}28432$. [W. B. B. H. S.]

4. একটি ত্রিভুজাকৃতি অঙ্গনের দুইটি বাহু 32 ও 48 মিটার এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $64^\circ 36'$. দেখাও যে, অপর শীর্ষদ্বয়ের কোণদ্বয় $40^\circ 8' 39{\cdot}4''$ এবং $75^\circ 15' 20{\cdot}6''$. দেওয়া আছে $\log 2 = {\cdot}30103$.

   $L \cot 32^\circ 18' = 10{\cdot}19916$; $L \tan 17^\circ 33' = 9{\cdot}50004$,

   $L \tan 17^\circ 34' = 9{\cdot}50048$. [C. P. U.]

5. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 11 সে.মি. ও 9 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°. ত্রিভুজটির অপর কোণদ্বয় নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,
$\log 3 = {\cdot}4771213$, $L \tan 9^\circ 49' = 9{\cdot}2381203$, $1'$-এর জন্য অন্তর = 7514.

   [C.P.U.]

6. যদি কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহু যথাক্রমে 24 মিটার ও 16 মিটার এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়, তাহা হইলে লগ-তালিকার সাহায্যে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

7. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{6}$ একক ও $(6-2\sqrt{3})$ একক এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 75° হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুটির দৈর্ঘ্য $2\sqrt{6}$ একক।

8. ABC ত্রিভুজে, $b=25{\cdot}16$ সে.মি., $c=14{\cdot}72$ সে.মি., $A=47^\circ 18'$. B ও C নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $L \cot 23^\circ 39' = 10{\cdot}35860$,

$L \tan 30^\circ 52' = 9{\cdot}77654$,

$\log 1044 = 3{\cdot}01870$, $\log 3988 = 3{\cdot}60076$.

9. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সে. মি. ও 8 সে. মি. এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ $36^\circ 12'$; অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর। প্রদত্ত $\log 2 = {\cdot}30103$, $L \tan 71^\circ 54' = 10{\cdot}4857$, $L \tan 31^\circ 28' = 9{\cdot}6867$.

10. ABC ত্রিভুজের $a : b = 7 : 3$ এবং $C = 60^\circ$; A এবং B নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$,

$L \tan 34^\circ 42' = 3{\cdot}8403776$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2699$.

11. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং উহার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহুদ্বয়ের অনুপাত $3 : 2$; উহার কোণগুলি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$,

$L \tan 19^\circ 6' = 9{\cdot}5394287$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 4084$.

12. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 65 এবং 25 একক; ঐ বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয়ের অন্তর 60°. ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $L \tan 37^\circ 35' = 9{\cdot}8862878$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2614$.

13. $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ এবং $b = 2$ সে.মি. হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

14. $B = 60^\circ 15'$, $C = 54^\circ 30'$ এবং $a = 100$ মিটার হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

15. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে 65°, $52^\circ 40'$ এবং অবশিষ্ট কোণটির বিপরীত বাহু 126 সে. মি. হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় $128{\cdot}91$ সে. মি.।

16. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ $41^\circ13'22''$ এবং $71^\circ19'5''$ এবং প্রথম কোণটির বিপরীত বাহু 55 সে.মি.; অপর কোণটির বিপরীত বাহু নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log\ 55=1\cdot7403627$, $\log\ 79063=4\cdot8979775$; $L\sin 41^\circ13'22''=9\cdot8188779$, $L\sin 71^\circ19'5''=9\cdot9764927$.

14·6. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান :

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং a-বাহুর বিপরীত কোণ A দেওয়া আছে। উহার অপর বাহু c এবং অপর কোণ দুইটি B, C নির্ণয় করিতে হইবে; অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে।

এস্থলে $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ সূত্র হইতে অর্থাৎ $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ হইতে, B-কোণের মান নির্ণয় করা যাইবে এবং ইহার পর $A+B+C=180^\circ$ হইতে C-কোণের মান পাওয়া যাইবে।

কিন্তু এক্ষেত্রে তিনটি বিভিন্ন অবস্থা উপস্থিত হইতে পারে।

(i) $b\sin A>a$; এক্ষেত্রে $\sin B\left(=\dfrac{b\sin A}{a}\right)$, এক অপেক্ষা বৃহত্তর। ইহা অবাস্তব, অর্থাৎ এস্থলে B নির্ণয় করা যায় না। সুতরাং এস্থলে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নয়।

(ii) $b\sin A=a$; এক্ষেত্রে $\sin B\left(=\dfrac{b\sin A}{a}\right)=1$, অর্থাৎ $B=90^\circ$ এবং $C=90^\circ-A$. সুতরাং এস্থলে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার B কোণ সমকোণ এবং $b^2=c^2+a^2$ সূত্রের সাহায্যে c-এর মান পাওয়া যাইবে।

(iii) $b\sin A<a$; এক্ষেত্রে $\sin B\left(=\dfrac{b\sin A}{a}\right)$, এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং এস্থলে B-এর মান নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সম্পূরক কোণের সাইন সমান হয় বলিয়া, ত্রিভুজের এই B-কোণটি সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ দুইই হইতে পারে। অতএব B-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে, যাহারা পরস্পর সম্পূরক। এস্থলেও তিনটি বিভিন্ন অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে।

(*a*) $a>b$ হইলে, $A>B$ হইবে। সুতরাং B স্থূলকোণ হইলে, Aও স্থূলকোণ হইবে। কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ কোন ত্রিভুজেরই দুইটি স্থূলকোণ থাকিতে পারে না। সুতরাং B কেবলমাত্র সূক্ষ্মকোণ হইতে পারে। A ও B উভয়েই

নির্দিষ্ট হইলে $A+B+C=180^\circ$ হইতে C-এর মান পাওয়া যাইবে। ইহার পর, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে c-এর মান পাওয়া যাইবে। অতএব, এক্ষেত্রে ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

(b) $a=b$ হইলে, $A=B$ হইবে। সুতরাং এস্থলেও B স্থূলকোণ হইতে পারে না। এক্ষেত্রেও B সূক্ষ্মকোণ হইবে এবং (a)-এর ন্যায় ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

(c) $a<b$ হইলে, $A<B$ হইবে। সুতরাং B সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ উভয়ই হইতে পারে ; অর্থাৎ a, b ও A প্রদত্ত হইলে এবং $a<b$ হইলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে এবং দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।

B-এর ভিন্ন মানের জন্য $A+B+C=180^\circ$ সূত্র হইতে C-এর ভিন্ন মান পাওয়া যাইবে।

আবার, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে c-বাহুর মান নির্ণয় করা যাইবে।

ত্রিভুজের সমাধানের এরূপ ক্ষেত্রকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (ambiguous case) বলে।

উপরোক্ত সিদ্ধান্তগুলিকে সংক্ষেপে নিম্নলিখিত ভাবে উল্লেখ করা যায় : ABC ত্রিভুজের a, b ও A প্রদত্ত হইলে এবং

(i) $a<b \sin A$ হইলে, কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নহে ;

(ii) $a=b \sin A$ হইলে, সমাধান হইবে একটি নির্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ ;

(iii) $a \geqslant b$ (অর্থাৎ $>b \sin A$) হইলে, B-সূক্ষ্মকোণবিশিষ্ট একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

(iv) $a>b \sin A$ কিন্তু $<b$ হইলে, দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে এবং এই ক্ষেত্রকে দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র বলা হয়।

14·7. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের বীজগণিতীয় আলোচনা :

ABC ত্রিভুজের a, b ও A প্রদত্ত হইলে, প্রথমে B নির্ণয় না করিয়া, $a^2=b^2+c^2-2\,bc \cos A$ সূত্র হইতে c-এর মান নির্ণয় করা যায়। ইহাকে c-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ধরিলে,

$$c^2-2bc \cos A+(b^2-a^2)=0.$$

সমাধান করিলে, $c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$.

(i) $a<b\sin A$ হইলে, $a^2-b^2\sin^2 A$ ঋণাত্মক হইবে ; সুতরাং c-এর দুইটি মানই কাল্পনিক হইবে। অতএব কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নহে।

(ii) $a=b\sin A$ হইলে, $a^2-b^2\sin^2 A=0$; সুতরাং c-এর দুইটি মান বাস্তব এবং পরস্পর সমান। অতএব B-সমকোণ-বিশিষ্ট একটি মাত্র ত্রিভুজ হইবে।

(iii) $a>b\sin A$ হইলে, $a^2-b^2\sin^2 A$ ধনাত্মক হইবে ; সুতরাং c-এর মান দুইটি বাস্তব এবং অসমান হইবে (উভয় মান সর্বত্র গ্রাহ্য নাও হইতে পারে)।

(*a*) $a>b$ অর্থাৎ $a^2>b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$ হইলে,

$$a^2-b^2\sin^2 A>b^2\cos^2 A$$

অর্থাৎ $\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}>b\cos A$ হইবে ; c-এর একটি মান ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। অতএব, একটি মাত্র সমাধান সম্ভব।

(*b*) $a=b$ হইলে, $a^2-b^2\sin^2 A=b^2-b^2\sin^2 A=b^2\cos^2 A$; সুতরাং c-এর একটি মান শূন্য হইবে। অতএব, একটিমাত্র সমাধান সম্ভব।

(*c*) $a<b$ অর্থাৎ $a^2<b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$ হইলে,

$$a^2-b^2\sin^2 A<b^2\cos^2 A$$

অর্থাৎ $\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}<b\cos A$ হইবে ; সুতরাং c-এর উভয়মানই বাস্তব এবং ধনাত্মক। অতএব, এক্ষেত্রে দুইটি সমাধান হইবে।

14·8. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের জ্যামিতিক আলোচনা :

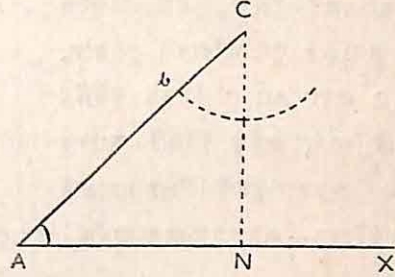
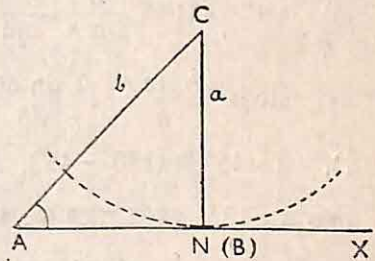
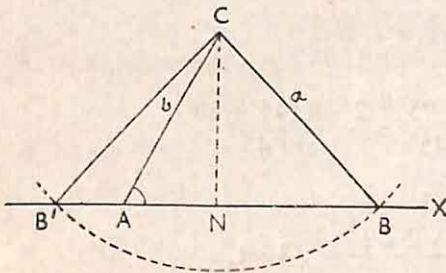
মনে কর, ABC ত্রিভুজের a, b ও A দেওয়া আছে। জ্যামিতিক প্রণালীতে ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উপরোক্ত বিষয়গুলি আরও পরিষ্কার করা যায়।

$\angle$A-এর সমান করিয়া $\angle$CAX অঙ্কিত করিয়া উহার একটি বাহু হইতে b-এর সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। AX সরলরেখার উপর CN লম্ব টান।

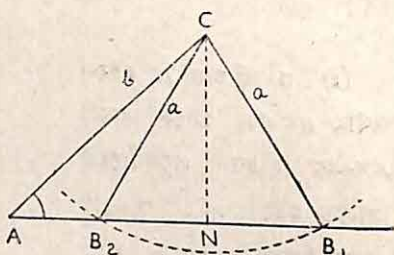
$$\therefore \frac{CN}{AC}=\sin A.$$

$$\therefore CN=AC\sin A=b\sin A.$$

এখন C-কে কেন্দ্র করিয়া a-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

(i) $a<b \sin A$ হইলে অর্থাৎ $a<CN$ হইলে, বৃত্তটি AX-এর সহিত একেবারেই মিলিত হইবে না। সুতরাং কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না অর্থাৎ ত্রিভুজটির কোন সমাধান পাওয়া যাইবে না।

(ii) $a=b \sin A=CN$ হইলে, বৃত্তটি AX-কে N-এর সহিত সমাপতিত B বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, যাহার বাহুদ্বয় BC ও CA এবং কোণ $\angle BAC$ যথাক্রমে প্রদত্ত a, b ও A-এর সমান। অতএব ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(iii) $a>b$ এবং $a>b \sin A$ অর্থাৎ $a>CN$ হইলে, বৃত্তটি AX-কে A বিন্দুর উভয়দিকে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে (B এবং B′) ছেদ করিবে। AB′C ত্রিভুজের B′C ও CA বাহুদ্বয় যথাক্রমে a ও b-এর সমান হইলেও $\angle B'AC$ প্রদত্ত কোণ A-এর সমান না হইয়া উহার সম্পূরক হইবে। সুতরাং $\triangle ABC'$ নির্ণেয় সমাধান নহে। এস্থলে একটি-মাত্র ত্রিভুজই ($\triangle ABC$) অঙ্কন করা সম্ভব। অতএব একটি-মাত্র সমাধান পাওয়া যাইবে।

(iv) $a=b=AC$ হইলে, C′, B-এর সহিত মিলিয়া যাইবে এবং একটিমাত্র

ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা যাইবে। অতএব একটিমাত্র সমাধান পাওয়া যাইবে।

(v) $a > b \sin A$ অর্থাৎ $a >$ CN কিন্তু $< b$ হইলে, বৃত্তটি AX-কে A বিন্দুর একই দিকে দুইটি বিন্দুতে (B_1 ও B_2) ছেদ করিবে। এস্থলে, AB_1C এবং AB_2C ত্রিভুজ দুইটির তিনটি অংশ, প্রদত্ত তিনটি অংশের সমান। সুতরাং দুইটি বিভিন্ন সমাধান সম্ভব হইবে। এরূপ ক্ষেত্রকে দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র বলে।

14·9. উদাহরণ :

(i) ABC ত্রিভুজের $a = \sqrt{6}$, $b = 2$ এবং $A = 60°$; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

(ii) যদি ABC ত্রিভুজের $a = \sqrt{6}$, $b = 2$ এবং $B = 45°$ প্রদত্ত হয়, সেক্ষেত্রে ত্রিভুজটির সমাধান কিরূপ হইবে ?

(i) ABC ত্রিভুজের $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ সূত্র হইতে,

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \sin 60°}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°.$$

$\therefore$ $B = 45°$ বা $(180° - 45°)$, অর্থাৎ $B = 45°$ বা $135°$.

কিন্তু $B = 135°$ হইতে পারে না, কারণ $B = 135°$ হইলে, $A + B > 180°$ হইবে, ইহা অসম্ভব ; $\therefore$ $B = 45°$.

$\therefore$ $C = 180° - (A + B) = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

আবার, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্র হইতে,

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin 75°}{\sin 45°} = \frac{2 \sin (45° + 30°)}{\sin 45°}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} + 1.$$

সুতরাং ত্রিভুজটির নির্ণেয় সমাধান হইল, $B = 45°$, $C = 75°$, $c = \sqrt{3} + 1$.

(iii) $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ.$

$\therefore$ $A = 60^\circ$ বা $(180^\circ - 60^\circ)$ অর্থাৎ $A = 60^\circ$ বা 120°.

$A = 60^\circ$ হইলে, $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

এবং $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{3} + 1.$

$A = 120^\circ$ হইলে, $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

এবং $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \sin (45^\circ - 30^\circ)}{\sin 45^\circ}$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} - 1.$$

এক্ষেত্রে $b > a \sin B$ কিন্তু $< a$; সেইজন্য দুইটি সমাধান পাওয়া যাইতেছে।

$\therefore$ সমাধান দুইটি হইল, $c = \sqrt{3} + 1$, $A = 60^\circ$, $C = 75^\circ$;

অথবা, $c = \sqrt{3} - 1$, $A = 120^\circ$, $C = 15^\circ$.

প্রশ্নমালা XIV (C)

1. $a = 2$ সে. মি., $b = 8$ সে. মি. এবং $A = 45^\circ$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

2. $b = 6$ সে.মি., $c = 4\sqrt{3}$ সে. মি. এবং $B = 60^\circ$ প্রদত্ত হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির একটিমাত্র সমাধান সম্ভব।

3. $A = 60^\circ$, $a = 7$ মিটার এবং $b = 8$ মিটার প্রদত্ত হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।

4. $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ এবং $B = 60^\circ$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

5. $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$ হইলে, B-এর মান নির্ণয় কর।

6. $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$ এবং $B = 45^\circ$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

7. ABC ত্রিভুজে $a = 356$, $b = 294$, $A = 71^\circ 15' 38''$ হইলে লগ-তালিকার সাহায্যে B এবং C নির্ণয় কর।

8. একটি ত্রিভুজে $b = 5$, $c = 7{\cdot}4$ এবং $B = 32^\circ 45'$; C নির্ণয় কর। প্রদত্ত $\log 5 = {\cdot}69897$, $\log 7{\cdot}4 = {\cdot}86923$, $L \sin 32^\circ 45' = 9{\cdot}73318$,

$L \sin 53^\circ 11' = 9{\cdot}90339$, $L \sin 53^\circ 12' = 9{\cdot}90349$.

9. ABC ত্রিভুজে $a=16$, $c=25$ এবং $C=60^\circ$; অবশিষ্ট কোণদ্বয় নির্ণয় কর। প্রদত্ত $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$,

$L \sin 33^\circ 39' = 9\cdot 7436024$, $1'$-এর জন্য প্রভেদ $=1897$.

10. ABC ত্রিভুজে $a=32$, $b=45$ এবং $A=35^\circ 24'$; অবশিষ্ট কোণদ্বয় নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 3\cdot 2 = \cdot 50515$, $\log 4\cdot 5 = \cdot 65321$,

$L \sin 35^\circ 24' = 9\cdot 76289$, $L \sin 54^\circ 32' = 9\cdot 91087$,

$L \sin 54^\circ 33' = 9\cdot 91096$.

11. ABC ত্রিভুজে $b=16$, $c=25$, $B=33^\circ 15'$; অবশিষ্ট কোণদ্বয় নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 33^\circ 15' = 9\cdot 7390129$,

$L \sin 58^\circ 56' = 9\cdot 9327616$, $L \sin 58^\circ 57' = 9\cdot 9328376$.

12. দেখাও যে, দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটির পরিবৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধদ্বয় সমান।

13. ত্রিভুজ সমাধানে b, c, B প্রদত্ত হইলে $(b<c)$ এবং a-এর সম্ভাব্য মান দুইটি a_1, a_2 হইলে, দেখাও যে,

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B = 4b^2.$$

14. ত্রিভুজ সমাধানে a, b, A প্রদত্ত হইলে, যদি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা হইলে সেই ক্ষেত্রে তৃতীয় বাহুটির দুইটি মান c_1 ও c_2 $(c_1 > c_2)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $c_1 - c_2 = 2a \cos B_1$, (B-এর সূক্ষ্মমান B_1) এবং

$$\cos \frac{C_1 - C_2}{2} = \frac{b \sin A}{a}.$$

15. ত্রিভুজ সমাধানে b, c, C প্রদত্ত হইলে, যদি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় এবং A ও B কোণের যথাক্রমে A_1, B_1 এবং A_2, B_2 দুইটি করিয়া মান পাওয়া যায়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin A_1}{\sin B_1} + \frac{\sin A_2}{\sin B_2} = 2 \cos C.$$

16. দেখাও যে, দুইটি সমাধানের ক্ষেত্রে, C-এর মান দুইটি দ্বারা

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(a-b)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}$$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

[বামপক্ষ $= \dfrac{\{(a+b)^2 + (a-b)^2\} - \{(a+b)^2 - (a-b)^2\} \cos C}{1 - \cos^2 C}$

$= \dfrac{2(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)}{\sin^2 C} = \dfrac{2c^2}{\sin^2 C} = \cdots$]

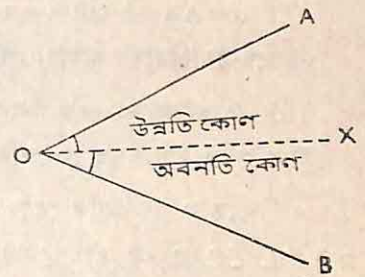
পঞ্চদশ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব

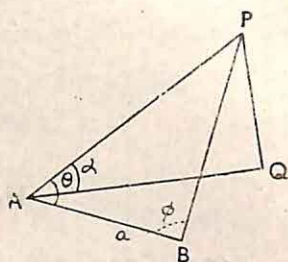
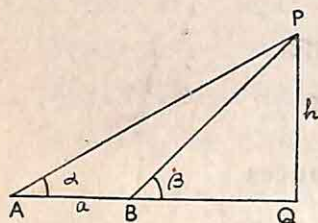
(Heights and Distances)

15·1. কোন বস্তুর দূরত্ব বা উচ্চতা প্রত্যক্ষভাবে পরিমাপ করা না গেলে কোন কোন পরিমাপক যন্ত্রের সাহায্যে ঐ বস্তুর দ্বারা দর্শকের চোখে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ নির্ণয় করিয়া ত্রিকোণমিতিক সূত্রের প্রয়োগে ঐ বস্তুর উচ্চতা বা দূরত্ব নির্ণয় করা হয়। জরিপের কাজে, চন্দ্র-সূর্য-গ্রহ-নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয়ে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ হইয়া থাকে।

ভূমিতলের সমান্তরাল সরলরেখাকে **অনুভূমিক** (horizontal) রেখা এবং উহার উপর লম্ব সরলরেখাকে **উল্লম্ব** (vertical) রেখা বলে। অন্যভাবেও বলা যায় যে, কোন বস্তুকে পৃথিবী যে-দিকে আকর্ষণ করে সে-দিকে অঙ্কিত সরলরেখাকে উল্লম্বরেখা এবং উহার উপর লম্ব সরলরেখাকে অনুভূমিক রেখা বলে।

মনে কর, OX একটি অনুভূমিক সরলরেখা। A বিন্দুটি উহার উপরের দিকে এবং B বিন্দুটি উহার নীচের দিকে অবস্থিত। যদি কোন দর্শক O বিন্দুতে তাহার চোখ রাখিয়া A ও B বিন্দুর প্রতি দৃষ্টিপাত করে, তাহা হইলে ∠XOA কোণটিকে A বিন্দুর **উন্নতি কোণ** (angle of elevation) এবং ∠XOB কোণটিকে (ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে লইয়া) B বিন্দুর **অবনতি কোণ** (angle of depression) বলে।

15·2. অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন দুর্গম বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ঃ

মনে কর, অনুভূমিক সমতলে A একটি বিন্দু এবং ঐ তলের উপর লম্বভাবে

অবস্থিত PQ একটি বস্তু। A বিন্দুতে বস্তুটির শীর্ষ P-এর উন্নতিকোণ α.
মনে কর, বস্তুটির উচ্চতা $PQ = h$ এবং A হইতে Q-এর দূরত্ব d অর্থাৎ $AQ = d$.

(i) যদি সম্ভব হয়, তাহা হইলে, A হইতে PQ-এর দিকে $AB(=a)$ অংশ কাটিয়া লও। মনে কর, B বিন্দুতে P-এর উন্নতি কোণ β.

এখন, চিত্র (i) হইতে,

$$a = AB = AQ - BQ = h \cot \alpha - h \cot \beta = h \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right).$$

$$= h\frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{h \sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\therefore \quad h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} = a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha).$$

$$\therefore \quad d = AQ = h \cot \alpha = a \cos \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha).$$

এক্ষণে লগারিদমের সাহায্য লইয়া h ও d নির্ণয় করা হয়।

(ii) A হইতে PQ-এর দিকে কোন দূরত্ব পরিমাপ করা সম্ভবপর না হইলে, A হইতে সুবিধামত অপর যে-কোন দিকে $AB(=a)$ অংশ কাটিয়া লও।

A বিন্দুতে P-এর উন্নতি কোণ α ; $\angle PAB$ ও $\angle PBA$ কোণদ্বয় মাপিয়া লও। মনে কর, $\angle PAB = \theta$ এবং $\angle PBA = \phi$.

এখন, চিত্র (ii) হইতে, $\triangle ABP$ হইতে,

$$\frac{AP}{\sin \phi} = \frac{AB}{\sin APB} = \frac{a}{\sin \{180^\circ - (\theta + \phi)\}} = \frac{a}{\sin (\theta + \phi)}.$$

$$\therefore \quad AP = \frac{a \sin \phi}{\sin(\theta + \phi)} = a \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi).$$

$\therefore$ $h = \text{PQ} = \text{AP} \sin \alpha = a \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$

এবং $d = \text{AQ} = \text{AP} \cos \alpha = a \cos \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$.

এস্থলেও লগারিদমের সাহায্য লইয়া h ও d নির্ণয় করা হয়।

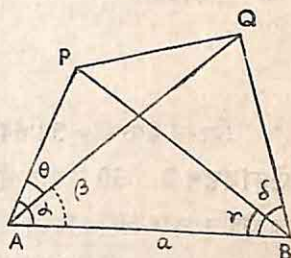
15·3. দুইটি দৃশ্যমান দুর্গম বস্তুর দূরত্ব নির্ণয়ঃ

মনে কর, P ও Q দুইটি দুর্গম বস্তু এবং ইহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

সুবিধামত দুইটি বিন্দু A ও B লও।

মনে কর, উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব a.

A বিন্দুতে উৎপন্ন তিনটি কোণ $\angle$PAB, $\angle$QAB এবং $\angle$PAQ মাপিয়া লও এবং মনে কর, উহাদের পরিমাপ যথাক্রমে α, β এবং θ.

B বিন্দুতে উৎপন্ন দুইটি কোণ $\angle$ABP এবং $\angle$ABQ মাপিয়া লও এবং মনে কর, উহাদের পরিমাপ যথাক্রমে γ ও δ.

এখন, $\triangle$ APB হইতে, $\dfrac{\text{AP}}{\sin \gamma} = \dfrac{\text{AB}}{\sin \text{APB}}$

$$= \frac{a}{\sin\{180^\circ - (\alpha + \gamma)\}} = \frac{a}{\sin (\alpha + \gamma)}.$$

$$\therefore \quad \text{AP} = a \sin \gamma \operatorname{cosec} (\alpha + \gamma).$$

অনুরূপভাবে, $\triangle$AQB হইতে, $\dfrac{\text{AQ}}{\sin \delta} = \dfrac{\text{AB}}{\sin \text{AQB}}$

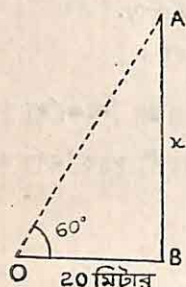
$$= \frac{a}{\sin \{180^\circ - (\beta + \delta)\}} = \frac{a}{\sin (\beta + \delta)}.$$

$\therefore$ $\text{AQ} = a \sin \delta \operatorname{cosec} (\beta + \delta)$.

$\triangle$PAQ হইতে, $\text{PQ}^2 = \text{AP}^2 + \text{AQ}^3 - 2\text{AP}.\ \text{AQ} \cos \theta$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণেয় দূরত্ব PQ পাওয়া যাইবে।

15·4. উদাহরণাবলীঃ

উদাহরণ 1. একটি দুর্গের তলদেশ হইতে 20 মিটার দূরে ঐ দুর্গের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° পরিলক্ষিত হয় ; দুর্গের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, দুর্গটি AB ; উহার উচ্চতা $= x$ মিটার। B বিন্দুর মধ্য দিয়া অনুভূমিক রেখার উপর O বিন্দু হইতে A বিন্দুর উন্নতি কোণ $= 60^\circ$.

$\therefore$ OB $= 20$ মিটার এবং $\angle BOA = 60^\circ$.

সুতরাং $\triangle OAB$ হইতে, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$

অথবা, $\sqrt{3} = \frac{x}{20}$

অথবা, $x = 20\sqrt{3}$

$= 20 \times 1{\cdot}732$ (প্রায়)

$= 34{\cdot}64.$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 34{\cdot}64$ মিটার।

উদাহরণ 2. 30 মিটার উচ্চ একটি বাড়ীর তলদেশ হইতে কতদূরে ঐ বাড়ীর ছাদের উন্নতিকোণ 60° হইবে ?

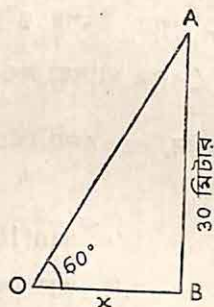
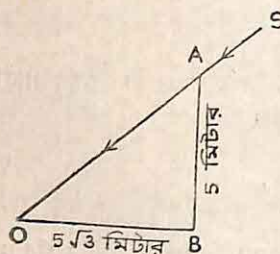
মনে কর, AB বাড়ীটির উচ্চতা ; B বিন্দু হইতে x মিটার দূরে O বিন্দুতে A বিন্দুর উন্নতি কোণ 60°.

$\therefore$ AB $= 30$ মিটার এবং $\angle BOA = 60^\circ$.

সুতরাং, $\triangle OAB$ হইতে, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$

অথবা, $\sqrt{3} = \frac{30}{x}$ অর্থাৎ, $x = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3}$

$= 10\sqrt{3} = 10 \times 1{\cdot}732$ (প্রায়) $= 17{\cdot}32.$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 17{\cdot}32$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ 3. 5 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $5\sqrt{3}$ মিটার হইলে তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কত ?

মনে কর, সূর্যের অবস্থান S এবং সূর্যরশ্মি AO-এর দিকে আসিয়া ভূমির উপর OB ছায়া উৎপন্ন করিয়াছে।

AB খুঁটির ছায়া OB এবং $\angle BOA$ কোণটিই নির্ণেয় উন্নতি কোণ।

এখানে, AB $= 5$ মিটার এবং OB $= 5\sqrt{3}$ মিটার।

$\triangle OAB$ হইতে, $\tan \angle BOA = \frac{AB}{OB} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ.$

$\therefore \angle BOA = 30^\circ. \quad \therefore$ সূর্যের উন্নতি কোণ $= 30^\circ.$

উদাহরণ 4. একটি নদীর এক তীর হইতে অন্য তীরের ঠিক উপরের একটি গাছের উন্নতি কোণ 45°. তীর হইতে 12 মিটার পিছাইয়া গেলে গাছটির উন্নতি কোণ হয় 30°. নদীর প্রস্থ এবং গাছের উচ্চতা নির্ণয় কর।

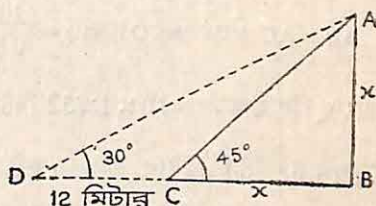
মনে কর, BC নদীর প্রস্থ এবং AB গাছের উচ্চতা x মিটার।

$\therefore \angle BCA = 45^\circ.$

$\triangle ABC$ হইতে,

$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$

অথবা $1 = \frac{x}{BC}.$

$\therefore BC = x$ মিটার।

আবার, $CD = 12$ মিটার ধরিলে, $\angle BDO = 30^\circ.$

সুতরাং, $\triangle ABD$ হইতে, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC+CD}$

অথবা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x+12}$

অথবা, $x\sqrt{3} = x + 12$ অর্থাৎ $x(\sqrt{3}-1) = 12$

অথবা, $x = \frac{12}{\sqrt{3}-1} = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{12(1{\cdot}732+1)}{3-1}$ (প্রায়)

$= 6(2{\cdot}732) = 16{\cdot}392.$

অতএব নদীর প্রস্থ এবং গাছের উচ্চতা উভয়ই প্রায় 16·392 মিটার।

উদাহরণ 5. টেলিগ্রাফের একটি খুঁটি ঝড়ে মচকাইয়া গিয়া খুঁটিটির মাথা রাস্তার উপর উহার পাদদেশ হইতে 10 মিটার দূরে 30° কোণে মিশিয়া গেল। খুঁটিটির উচ্চতা কত ?

মনে কর, AB টেলিগ্রাফের খুঁটিটি C বিন্দুতে মচকাইয়া গিয়া ভূমির উপর D বিন্দুতে পড়িল। $\therefore AC = CD, \angle BDC = 30^\circ$ এবং $BD = 10$ মিটার।

BCD ত্রিভুজ হইতে,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}, \text{ অথবা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{10}$$

অথবা, $BC = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

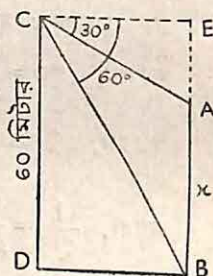
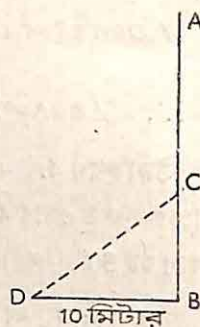
আবার, $\cos 30^\circ = \frac{BD}{CD}$

অথবা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{CD}$ অথবা, $CD = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore \quad AB = AC + BC = CD + BC = \frac{20}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}.$$

সুতরাং খুঁটির উচ্চতা $= 10 \times 1{\cdot}732$ মিটার (প্রায়) $= 17{\cdot}32$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ 6. 60 মিটার উচ্চ একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে একটি স্তম্ভের শীর্ষের ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° পরিলক্ষিত হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, CD পাহাড়টির উচ্চতা 60 মিটার এবং AB স্তম্ভটির উচ্চতা x মিটার। C বিন্দুর ভিতর দিয়া BD অনুভূমিক রেখার সমান্তরাল করিয়া CE সরলরেখা টানা হইল। উহা বর্ধিত BA-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore \quad \angle ECA = 30^\circ$ এবং $\angle ECB = 60^\circ$.

এখন $EB = CD = 60$ মিটার।

$\therefore \quad AE = EB - AB = (60 - x)$ মিটার।

সুতরাং ত্রিভুজ AEC হইতে, $\tan 30^\circ = \frac{AE}{CE}$

অথবা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60 - x}{CE}$. $\therefore \quad CE = (60 - x)\sqrt{3}$.

আবার, $\tan 60^\circ = \frac{BE}{CE}$, অথবা, $\sqrt{3} = \frac{60}{(60 - x)\sqrt{3}}$

$\therefore \quad (60 - x)3 = 60$

অথবা, $60-x=20$ অর্থাৎ, $x=60-20=40.$

$\therefore$ স্তম্ভটির নির্ণেয় উচ্চতা $=40$ মিটার।

উদাহরণ 7. একটি দুর্গের চূড়া ও তলদেশ হইতে 30 মিটার উচ্চ অন্য একটি দুর্গের চূড়ার অবনতি কোণ ও উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হইলে প্রথম দুর্গটির উচ্চতা কত?

মনে কর, CD দুর্গের চূড়া ও তলদেশ হইতে 30 মিটার উচ্চ AB দুর্গের অবনতি ও উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30°. A বিন্দুর মধ্য দিয়া অনুভূমিক রেখা BD-এর সমান্তরাল করিয়া AE রেখা টানা হইল। উহা CD-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুর মধ্য দিয়া BD-এর সমান্তরাল করিয়া CF রেখা টানা হইল।

$\therefore$ $DE=AB=30$ মিটার, $\angle BDA=30^\circ$ এবং $\angle FCA=60^\circ$.

এখন, $AE \parallel CF$ এবং CA উহাদের ছেদক।

$\therefore$ $\angle EAC=$ একান্তর $\angle FCA=60^\circ$.

$\triangle ABD$ হইতে, $\tan 30^\circ=\frac{AB}{BD}$

অথবা, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{30}{BD}$

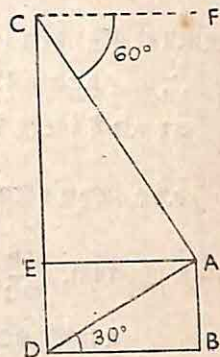
অথবা, $BD=30\sqrt{3}.$

আবার, $\triangle ACE$ হইতে, $\tan \angle EAC=\frac{CE}{AE}$

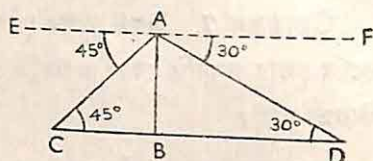
অথবা, $\tan 60^\circ=\frac{CE}{BD}$, অথবা, $\sqrt{3}=\frac{CE}{30\sqrt{3}}$

অথবা, $CE=30\sqrt{3}\times\sqrt{3}=90.$

$\therefore$ $CD=CE+ED=90+30=120.$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=120$ মিটার।

উদাহরণ 8. একটি সোজা রাস্তার ঠিক উপরে একটি এরোপ্লেন হইতে উহার বিপরীত পার্শ্বে রাস্তাটির উপর দুইটি দাগের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°.

দুইটি দাগের মধ্যে দূরত্ব এক কিলোমিটার হইলে রাস্তা হইতে কত উপরে এরোপ্লেনটি আছে ? [C.P.U.]

মনে কর, রাস্তার উপর C, D দুইটি দাগ। A বিন্দু এরোপ্লেনের অবস্থান। CD = এক কিলোমিটার। A বিন্দুর মধ্য দিয়া CD-এর সমান্তরাল করিয়া EF সরলরেখা টানা হইল। $\angle EAC = 45^\circ$ এবং $\angle FAD = 30^\circ$.

$\therefore \quad \angle ACB = 45^\circ$ এবং $\angle ADB = 30^\circ$.

লম্ব AB-ই নির্ণেয় উচ্চতা।

ABC ত্রিভুজ হইতে, $\frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$

অথবা, $\frac{AB}{BC} = 1$

অথবা, $BC = AB$.

$\triangle ABD$ হইতে, $\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অথবা, $BD = AB\sqrt{3}$.

এখন $CD = 1$ কিলোমিটার।

$\therefore \quad CB + BD = AB + AB\sqrt{3} = AB(\sqrt{3}+1) = 1$ কিলোমিটার।

$\therefore \quad AB = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$ কি. মি.

$= \frac{1{\cdot}732 - 1}{3-1}$ কি. মি. (প্রায়) $= \frac{{\cdot}732}{2}$ কি. মি. $= {\cdot}366$ কিলোমিটার।

সুতরাং এরোপ্লেনটি রাস্তা হইতে প্রায় ·366 কিলোমিটার উপরে আছে।

উদাহরণ 9. একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে 360 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বস্তুর অবনতি কোণ যথাক্রমে $27^\circ 12'$ ও $18^\circ 24'$. বস্তুদ্বয় ও ঐ চূড়া একই উল্লম্বতলে অবস্থিত হইলে, পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 360 = 2{\cdot}5563$, $\log 339{\cdot}4 = 2{\cdot}5308$,

$\log \sin 27^\circ 12' = \bar{1}{\cdot}6600$,

$\log \sin 18^\circ 24' = \bar{1}{\cdot}4992$, $\log \sin 8^\circ 48' = \bar{1}{\cdot}1847$.

মনে কর, AB পাহাড়ের উচ্চতা $=x$ মিটার ; C, D দুইটি বস্তু, উহাদের মধ্যে দূরত্ব CD = 360 মিটার।

সুতরাং, $\angle ACB = 27^\circ 12'$

এবং $\angle ADB = 18^\circ 24'$.

$\therefore \angle CAD$

$= 27^\circ 12' - 18^\circ 24'$

$= 8^\circ 48'$.

$\triangle ABC$ হইতে,

$$\frac{x}{AC} = \sin 27^\circ 12'.$$

$$\therefore \quad AC = \frac{x}{\sin 27^\circ 12'}.$$

পুনরায়, ACD ত্রিভুজ হইতে, $\dfrac{AC}{\sin ADC} = \dfrac{CD}{\sin CAD}$

অথবা, $$\frac{x}{\sin 27^\circ 12' . \sin 18^\circ 24'} = \frac{360}{\sin 8^\circ 48'}$$

অথবা, $$x = \frac{360 . \sin 27^\circ 12' \sin 18^\circ 24'}{\sin 8^\circ 48'}.$$

$$\therefore \quad \log x = \log 360 + \log \sin 27^\circ 12' + \log \sin 18^\circ 24' - \log \sin 8^\circ 48'$$

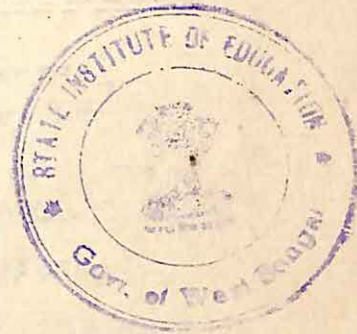
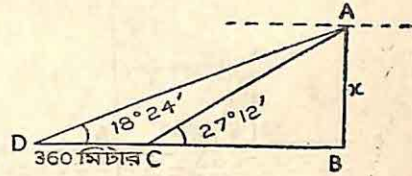
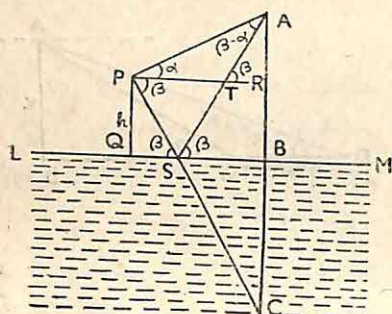
$$= 2{\cdot}5563 + \bar{1}{\cdot}6600 + \bar{1}{\cdot}4992 - \bar{1}{\cdot}1847$$

$$= 2{\cdot}5308 = \log 339{\cdot}4.$$

$$\therefore \quad x = 339{\cdot}4.$$

সুতরাং পাহাড়ের উচ্চতা = 339·4 মিটার।

উদাহরণ 10. একটি হ্রদের h মিটার উর্ধে অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটি আলোকের উন্নতি কোণ α এবং হ্রদের জলে উহার প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ β ; প্রমাণ কর যে, হ্রদ হইতে আলোকের উচ্চতা $\dfrac{h \sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ মিটার।

মনে কর, জলের উপরিভাগের সমতল LM এবং ঐ সমতলের h মিটার উপরে P একটি বিন্দু। PQ $= h$ মিটার। মনে কর, আলোকের অবস্থান A বিন্দুতে।

A বিন্দু হইতে LM-এর উপর AB লম্ব টান এবং উহাকে C পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর,

যেন AB = BC হয়।

সুতরাং C হইবে A-এর প্রতিবিম্ব।

P-বিন্দু দিয়া QM-এর সমান্তরাল করিয়া PR টান। PC যুক্ত কর, উহা যেন LM-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। AS যুক্ত কর, উহা যেন PR-কে T বিন্দুতে ছেদ করে; তাহা হইলে,

$\angle APR = \alpha$ এবং $\angle RPC = \beta =$ একান্তর $\angle PSQ = \angle ASB$

(প্রতিফলনের নিয়মানুসারে)

$=$ অনুরূপ $\angle ATR$.

$\therefore \quad \angle PAT = \beta - \alpha$ এবং $\angle APS = \beta + \alpha$.

$\triangle APS$ হইতে, $\dfrac{AS}{\sin(\beta+\alpha)} = \dfrac{PS}{\sin(\beta-\alpha)} \quad \cdots \quad (1)$

এক্ষণে, $\triangle ABS$ হইতে, $AS = AB \operatorname{cosec} \beta$

এবং $\triangle PQS$ হইতে, $PS = PQ \operatorname{cosec} \beta = h \operatorname{cosec} \beta$.

সুতরাং, (1) হইতে, $\dfrac{AB \operatorname{cosec} \beta}{\sin(\beta+\alpha)} = \dfrac{h \operatorname{cosec} \beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

$\therefore \quad AB = h \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= h \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ মিটার।

উদাহরণ 11. একটি গোলাকৃতি বেলুনের ব্যাসার্ধ r মিটার। যখন বেলুনের কেন্দ্রের উন্নতি কোণ β, তখন এক ব্যক্তির চক্ষুতে বেলুনের সম্মুখ কোণ α হইলে, বেলুনের কেন্দ্রের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, ব্যক্তিটির চক্ষুর অবস্থান A এবং A বিন্দু দিয়া অনুভূমিক সরলরেখা AB টান। মনে কর, গোলাকার বেলুনটির কেন্দ্র C.

সুতরাং, $\angle CAB = \beta$.

মনে কর, অনুভূমিক তল হইতে বেলুনটির কেন্দ্রের উচ্চতা $CD = h$.

A বিন্দু হইতে গোলাকার বেলুনটির দুইটি স্পর্শক AP ও AQ হইলে, $\angle PAQ = \alpha$.

$\therefore \angle PAC = \frac{1}{2}\angle PAQ = \frac{1}{2}\alpha$.

$\triangle ACP$ হইতে,

$AC = CP \text{ cosec } \frac{1}{2}\alpha$

$= r \text{ cosec } \frac{1}{2}\alpha$.

$\triangle ACD$ হইতে, $CD = AC \sin\beta = r \text{ cosec } \frac{1}{2}\alpha \sin\beta$.

$\therefore$ বেলুনটির কেন্দ্রের নির্ণেয় উচ্চতা $= r \text{ cosec } \frac{1}{2}\alpha \sin\beta$ মিটার।

উদাহরণ 12. $2a$ দৈর্ঘ্যের কোন অনুভূমিক রেখার প্রত্যেক প্রান্ত হইতে কোন পর্বতশীর্ষের উন্নতি কোণ θ এবং ঐ রেখার মধ্যবিন্দু হইতে ঐ শীর্ষের উন্নতি কোণ ϕ হইলে, প্রমাণ কর যে, পর্বতের উচ্চতা

$$\frac{a \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)}}.$$ [W.B.B.H.S.]

মনে কর, PQ পর্বতের শীর্ষ P এবং $PQ = h$; $2a$-দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট অনুভূমিক সরলরেখা AB-এর মধ্যবিন্দু C.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$\angle PAQ = \angle PBQ = \theta$

এবং $\angle PCQ = \phi$.

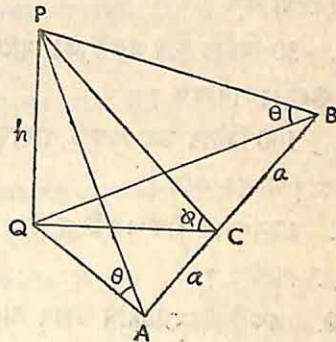
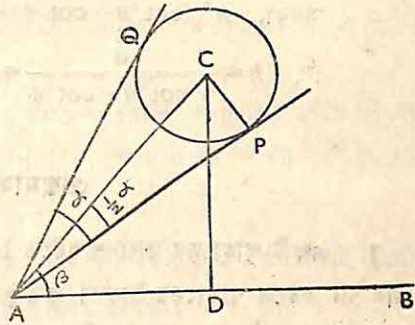
স্পষ্টতঃই, PQ সরলরেখা, QA, QB, QC-এর প্রত্যেকটির উপর লম্ব।

$\therefore AQ = h \cot\theta = BQ$

এবং $CQ = h \cot\phi$.

এখন, AQB ত্রিভুজের $AQ = BQ$ বলিয়া, AQB ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ; আবার AB-এর মধ্যবিন্দু C.

$\therefore$ QC, AB-এর উপর লম্ব অর্থাৎ, $\angle QCB = 90°$.

$\therefore \triangle QCB$ হইতে, $BQ^2 = QC^2 + CB^2$

অথবা, $h^2 \cot^2\theta = h^2 \cot^2\phi + a^2$

অথবা, $h^2 (\cot^2\theta - \cot^2\phi) = a^2$.

$$\therefore \quad h = \frac{a}{\sqrt{\cot^2\theta - \cot^2\phi}} = \frac{a \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)}}.$$

প্রশ্নমালা XV

1. একটি পাহাড়ের তলদেশ হইতে 100 মিটার দূরে ঐ পাহাড়ের চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হইলে পাহাড়ের উচ্চতা কত ?

2. একটি চিমনি হইতে ·2 কিলোমিটার দূরে উহার চূড়ার উন্নতি কোণ 60° পরিলক্ষিত হয়। চিমনির উচ্চতা নির্ণয় কর।

3. সূর্যের উন্নতিকোণ যখন 45°, তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 14 মিটার। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

4. একটি নদীর এক তীর হইতে অন্য তীরের ঠিক উপরে 5 মিটার দীর্ঘ একটি গাছের উন্নতিকোণ 30° হইলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর।

5. 70 মিটার উচ্চ একটি দুর্গের তলদেশ হইতে কত দূরে ঐ দুর্গের শীর্ষের উন্নতিকোণ 45° হয় ?

6. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 60°, তখন 18 মিটার দীর্ঘ একটি টেলিগ্রাফ খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য কত ?

7. 30 মিটার দীর্ঘ একটি তালগাছের তলদেশ হইতে 10 $\sqrt{3}$ মিটার দূরে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ কত ?

8. 500 মিটার উচ্চ একটি পাহাড় উহার তলদেশ হইতে অর্ধ কিলোমিটার দূরে কত কোণ উৎপন্ন করে ?

9. 17 মিটার দীর্ঘ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য 17 $\sqrt{3}$ মিটার হইলে সূর্যের উন্নতি কোণ কত ?

10. একটি উল্লম্ব চিমনি উহার তলদেশের একটি অনুভূমিক রেখার উপর দুইটি বিন্দু A ও B-তে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে। AB = 100 মিটার হইলে চিমনির উচ্চতা নির্ণয় কর।

11. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হইতে 30° হইলে, একটি টেলিগ্রাফ খুঁটির ছায়া 6 মিটার বাড়িয়া যায়। দেখাও যে, খুঁটিটির উচ্চতা $3(1+\sqrt{3})$ মিটার।

[C. P. U.]

12. (*a*) একটি দুর্গের তলদেশ হইতে কিছু দূরে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 45° পরিলক্ষিত হয়, কিন্তু দুর্গের দিকে 124 মিটার অগ্রসর হইলে ঐ শীর্ষের উন্নতিকোণ 60° হয়। দুর্গের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(*b*) একটি 54 মিটার উচ্চ মনুমেন্টের তলদেশ হইতে কিছুদূরে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 45°. ঐ স্থান হইতে কত পিছাইয়া গেলে ঐ শীর্ষের উন্নতিকোণ 30° পরিলক্ষিত হইবে ?

13. একটি নদীর এক তীর হইতে অন্য তীরের ঠিক উপরের একটি দুর্গের উন্নতিকোণ 60°. তীর হইতে 60 মিটার পিছাইয়া গেলে দুর্গটির কোণ হয় 30°. নদীর বিস্তার এবং দুর্গের উচ্চতা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

14. একটি 360 সেন্টিমিটার উচ্চ খুঁটির তলদেশ হইতে কিছুদূরে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 60°. ঐ স্থান হইতে 415·68 সেন্টিমিটার পিছাইয়া গেলে ঐ শীর্ষের উন্নতিকোণ কত হইবে ? ($\sqrt{3}=1{\cdot}732$)

15. একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি মচকাইয়া গিয়া খুঁটিটির মাথা রাস্তার উপর উহার তলদেশ হইতে 13 মিটার দূরে 60° কোণে পড়িল। খুঁটিটির উচ্চতা কত ?

16. একটি 15 মিটার উচ্চ বৈদ্যুতিক খুঁটি সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হইয়া ভাঙ্গিয়া গেল এবং উপরের অংশ ভূমির উপর 30° কোণে পড়িল। খুঁটিটির কোথায় ভাঙ্গিয়াছিল ? [B. U. Ent.]

17. দুইটি উলম্ব স্তম্ভের একটির উচ্চতা অপরটির দ্বিগুণ। উহাদের মধ্যে দূরত্ব 150 ফুট। স্তম্ভ দুইটির তলদেশের সংযোগকারী সরলরেখার উপর কোন বিন্দুতে বড় স্তম্ভ ও ছোট স্তম্ভটির উন্নতিকোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°. স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতা এবং ঐ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

18. সম-উচ্চতা-বিশিষ্ট দুইটি চিমনির তলদেশের সংযোজক অনুভূমিক সরলরেখার উপর এক বিন্দুতে দুইটি চিমনির উন্নতিকোণ যথাক্রমে 60° ও 45°. চিমনি দুইটির মধ্যে দূরত্ব এক কিলোমিটার হইলে উহাদের উচ্চতা কত ?

19. একটি 24 মিটার উচ্চ বাড়ীর ছাদ হইতে একটি উলম্ব গাছের শীর্ষের ও তলদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 45°. গাছটির উচ্চতা কত ?

20. একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে একটি 100 মিটার উচ্চ স্তম্ভের মাথার ও তলদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° পরিলক্ষিত হয়। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

21. একটি 32 গজ উচ্চ দুর্গের শীর্ষ ও তলদেশ হইতে অন্য একটি দুর্গের শীর্ষের

অবনতি কোণ ও উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 30°. দ্বিতীয় দুর্গটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

22. একটি বাড়ীর ছাদ ও ভূমি হইতে 23 মিটার উচ্চ অন্য একটি বাড়ীর ছাদের অবনতি কোণ ও উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 45° হইলে, প্রথম বাড়ীটির উচ্চতা কত ?

23. একটি সোজা রাস্তার ঠিক উপরে একটি এরোপ্লেন হইতে রাস্তাটির উপর এরোপ্লেনের বিপরীত পার্শ্বে পর পর দুইটি মাইলপোষ্টের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 60°. এরোপ্লেনের উচ্চতা নির্ণয় কর।

24. একটি সোজা রাস্তার উপর একটি এরোপ্লেন হইতে রাস্তাটির উপর এরোপ্লেনের একই পার্শ্বে দুইটি দাগের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°. দুইটি দাগের মধ্যে দূরত্ব এক কিলোমিটার হইলে রাস্তা হইতে কত উপরে এরোপ্লেনটি আছে ? ($\sqrt{3}=1{\cdot}732$).

25. সমুদ্রের 7200 ফুট উপরে একটি বেলুন হইতে দুইটি যুদ্ধপোতের অবনতিকোণ যথাক্রমে 30° এবং 45°. একটি যুদ্ধপোত বেলুনটির পূর্বদিকে এবং অপরটি দক্ষিণ দিকে হইলে যুদ্ধপোত দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ? [W. B. B. H. S.]

26. একটি পাহাড়ের পাদদেশ হইতে কিছুদূরে পাহাড়টির উন্নতিকোণ 28° এবং পাহাড় হইতে একই রেখায় আরও 3 মাইল 77 গজ দূরে উন্নতিকোণ 16° লক্ষিত হয়। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $L \sin 28^\circ = 9{\cdot}6716$, $L \sin 12^\circ = 9{\cdot}3179$, $\log 1{\cdot}6071 = {\cdot}2060$, $L \sin 16^\circ = 9{\cdot}4403$.

27. (*a*) কোন পাহাড়ের পাদদেশের সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন বিন্দুতে উহার চূড়ার উন্নতি কোণ 45° ; ঐ তলের সহিত 30° কোণে নত চড়াই পথে চূড়ার দিকে 1 কিলোমিটার উঠিয়া গেলে, ঐ চূড়ার উন্নতিকোণ হয় 60°. পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

(*b*) একটি স্তম্ভের দক্ষিণে অবস্থিত কোন এক বিন্দু A হইতে উহার উন্নতি কোণ 30° এবং A-এর পশ্চিমে অবস্থিত অপর কোন বিন্দু B হইতে ঐ স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 18° ; A হইতে B-এর দূরত্ব a হইলে, দেখাও যে, স্তম্ভের উচ্চতা

$$\frac{a}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}.$$

28. (*a*) কোন পাহাড়ের চূড়ায় অবস্থিত কোন লোক উহার ঠিক নীচে নদীর তীরের দিকে ধাবমান একটি নৌকার অবনতি কোণ লক্ষ্য করিল 30° ; 3 মিনিট

পরে ঐ নৌকার অবনতি কোণ লক্ষ্য করিল 60°. যদি নৌকাটি সমবেগে চলে, তবে তীরে পৌছিতে উহার কত সময় লাগিবে ?

(*b*) কোন সোজা উপকূলের উপর A, B, C তিনটি বস্তু এরূপভাবে অবস্থান করে যে, AB = BC = 4 কিলোমিটার। উপকূলের সহিত লম্বরেখা বরাবর B-এর দিকে ধাবমান একটি স্টীমার কোন নির্দিষ্ট অবস্থান AC-এর সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই দিকে 10 মিনিট চলিবার পর কোন অবস্থানে AC-এর সহিত উহা 120° কোণ উৎপন্ন করে। স্টীমারের গতিবেগ কত ? [W. B. B. H. S.]

29. AB স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে ও উহার পাদদেশ A-এর সহিত সমভূমিতে অবস্থিত P স্টেশন হইতে স্তম্ভের চূড়ার উন্নতি কোণ θ এবং P-এর ঠিক পশ্চিমে Q স্টেশন হইতে ঐ উন্নতিকোণ ϕ ; P ও Q-এর মধ্যে দূরত্ব a এবং স্তম্ভের উচ্চতা h হইলে, প্রমাণ কর যে, $h^2(\cot^2\phi - \cot^2\theta) = a^2$.

30. (*a*) অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন স্তম্ভের উপর একটি পতাকা-দণ্ড আছে। এক ব্যক্তি ঐ তলস্থিত কোন বিন্দুতে দেখিল ঐ স্তম্ভ ও পতাকা-দণ্ডের সম্মুখকোণ যথাক্রমে α ও β. সে সোজা স্তম্ভের দিকে d মিটার অগ্রসর হইয়া দণ্ডের সম্মুখকোণ β দেখিল। স্তম্ভ ও দণ্ডের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(*b*) অনুভূমিক তলে অবস্থিত স্তম্ভের চূড়ায় একটি পতাকাদণ্ড আছে। ঐ তলে অবস্থিত কোন বিন্দুতে স্তম্ভটি α কোণ উৎপন্ন করে এবং পতাকাদণ্ড β কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভের পাদদেশের a মিটার নিকটে কোন বিন্দুতে পতাকাদণ্ড ঐ β কোণ উৎপন্ন করিলে, প্রমাণ কর যে, স্তম্ভের উচ্চতা

$$\frac{a\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}.$$

31. একটি পাখী ভূমি হইতে একই উচ্চতায় উড়িয়া চলিয়াছে ; একই সময় অন্তর পর পর চারিবার দেখা গেল উহার উন্নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; পাখীটি সমবেগে উড়িলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma).$$

32. একটি সোজা পথ দিয়া যাইবার সময় কোন এক স্থানে দুইটি বস্তু দর্শকের চোখে বৃহত্তম কোণ α উৎপন্ন করে এবং সেইস্থান হইতে a দূরত্বে গিয়া দেখিল, বস্তু দুইটিকে একই বস্তু দেখাইতেছে এবং পথের সহিত তাহারা β কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, বস্তু দুইটির মধ্যে দূরত্ব

$$\frac{2a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

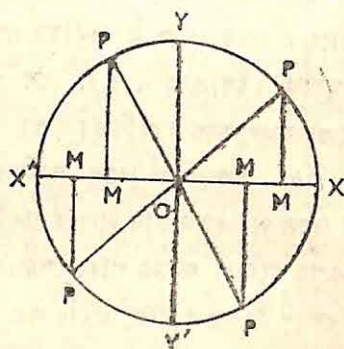
ষোড়শ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

(Graphs of Trigonometrical Functions)

16·1. কোণানুপাতের পরিবর্তন :

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত। OP একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের রেখাংশ। OP, উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে উহার প্রান্তবিন্দু O-এর চারিদিকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরিয়া উহার অপর প্রান্ত P দ্বারা XYX′Y′ বৃত্তটি উৎপন্ন করিল।

P বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান হইতে XOX′-এর উপর PM লম্ব অঙ্কিত হইল। প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে ঐ লম্বের দৈর্ঘ্যগুলি ধনাত্মক এবং তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে উহারা ঋণাত্মক। প্রচলিত রীতি অনুযায়ী OP সর্বদা ধনাত্মক। YOY′-এর যে-পার্শ্বে X অবস্থিত M সেই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, OM ধনাত্মক, অন্যথায় OM ঋণাত্মক লওয়াই প্রচলিত রীতি।

(i) **কোন কোণের সাইনের পরিবর্তন**

সংজ্ঞা অনুসারে, $\sin POX = \frac{PM}{OP}$.

যখন OP রেখাংশ OX-এর সহিত মিলিত থাকে, তখন PM-এর মান শূন্য হয়; অতএব POX কোণটি শূন্য, তৎসহ উহার সাইনও শূন্য হয়। OP প্রথম পাদে যে-কোন অবস্থানে থাকাকালে PM ধনাত্মক এবং প্রাথমিক অবস্থান হইতে ইহা ক্রমাগত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইয়া, যখন OP, OY-এর সহিত মিলিত হইবে, তখন PM = OP হইবে। অতএব কোণের মান 0° হইতে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হওয়ার সময়, উহার সাইন 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে।

OP দ্বিতীয় পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM ধনাত্মক থাকিয়া ক্রমশ হ্রাসপ্রাপ্ত

হইবে যতক্ষণ না OP, OX′-এর সহিত মিলিত হয়। OP, OX′-এর সহিত মিলিত হইলে PM = 0 হইবে। অতএব কোণের পরিমাণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হওয়ার কালে উহার সাইন 1 হইতে হ্রাসপ্রাপ্ত হইয়া শূন্যমানের হইবে। আবার, OP তৃতীয় পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM ঋণাত্মক থাকিবে এবং উহার পরমমান, OP, OY′-এর সহিত মিলিত হওয়া পর্য্যন্ত ক্রমাগত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে।

অতএব কোণের মান 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে, উহার সাইন ঋণাত্মক হইবে এবং 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত মানের হইবে। OP চতুর্থপাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM ঋণাত্মক থাকিয়া উহার পরমমান হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে এবং উহা OX-এর সহিত মিলিত হওয়া পর্য্যন্ত উৎপন্ন কোণের সাইন −1 হইতে 0 মানের হইবে। অতএব কোণটি 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে উহার সাইনের মান −1 হইতে 0 হইবে।

(ii) **কোন কোণের কোসাইনের পরিবর্তন**

চিত্র অনুযায়ী $\cos POX = \frac{OM}{OP}$.

প্রাথমিক অবস্থানে OP এবং OX মিলিত অবস্থায় আছে এবং OM = OP ; অতএব কোণ শূন্য হইলে উহার কোসাইন 1 হইবে। OP প্রথম পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে OM ধনাত্মক থাকিয়া ক্রমাগত হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে এবং OP, OY-এর সহিত মিলিত হইলে OM = 0 হইবে। অতএব কোণের পরিমাণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হইবার কালে উহার কোসাইনের মান 1 হইতে হ্রাস প্রাপ্ত হইয়া 0 হইবে। OP দ্বিতীয় পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে OM ঋণাত্মক হইবে এবং ঋণাত্মক মানের মাধ্যমে শেষ অবস্থানে OX′-এর সহিত মিলিত হইবে। অতএব কোণের পরিমাণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবার কালে উহার কোসাইনের মান 0 হইতে হ্রাস প্রাপ্ত হইয়া −1 হইবে। অতঃপর OP তৃতীয় পাদে ঘূর্ণায়মান থাকা-কালে OX′ হইতে OY′ পর্য্যন্ত উহার ঘূর্ণনের সাথে সাথে OM ঋণাত্মক থাকিয়া উহার পরমমান 1 হইতে 0 হইবে।

অতএব কোণের পরিমাণ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত পরিবর্তিত হইলে উহার কোসাইন −1 হইতে 0 পর্য্যন্ত পরিবর্তিত হইবে। পুনরায় ঘূর্ণনের সময় চতুর্থ পাদে OP-এর অবস্থান কালে OM ক্রমাগত বৃদ্ধি পাইবে এবং অবশেষে 360° ঘূর্ণনের পর OX-এর সহিত মিলিয়া OM = OP হইবে। সুতরাং কোণের পরিমাণ 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত পরিবর্তিত হইলে উহার কোসাইন 0 হইতে বৃদ্ধি প্রাপ্ত হইয়া 1 পর্য্যন্ত হইবে।

(iii) **কোন কোণের ট্যানজেন্টের পরিবর্তন**

চিত্র হইতে $\tan POX = \frac{PM}{OM}$.

প্রাথমিক অবস্থানে OP, OX-এর সহিত মিলিত অবস্থায় থাকে এবং OM = OX হওয়ায় PM = 0 হয়। অতএব কোণ শূন্য হইলে উহার ট্যানজেণ্টও শূন্য হয়। OP প্রথমপাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM ও OM উভয়েই ধনাত্মক থাকে, PM ক্রমাগত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয় এবং OM ক্রমাগত হ্রাসপ্রাপ্ত হয় যতক্ষণ না OP, OY-এর সহিত মিলিত হয়। অতএব কোণের পরিমাণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে উহার ট্যানজেণ্ট 0 হইতে অসীমপর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। সুতরাং কোণটির মান যতই 90°-এর নিকটবর্তী হইবে উহার ট্যানজেণ্টের মান ততই অসীমভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে। ইহা প্রকাশ করিতে বলা হয় যে, tan 90°-এর মান অসীম। OP দ্বিতীয় পাদে থাকা-কালে PM ধনাত্মক থাকিবে কিন্তু OM ঋণাত্মক হইবে। PM ক্রমাগত হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে এবং OM ঋণাত্মকভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে এবং OP, OX′-এর সহিত মিলিত হইলে OM = OP (সাংখ্য মান)। অতএব কোণের মান 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে উহার ট্যানজেণ্টের মান ঋণাত্মক হইবে এবং উহার সাংখ্যমান অসীম হইতে শূন্য হইবে। OP তৃতীয়পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM এবং OM উভয়েই ঋণাত্মক হইবে। PM-এর সাংখ্যমান বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে এবং OM-এর সাংখ্য মান হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে যতক্ষণ না OP, OY′-এর সহিত মিলিত হয়। অতএব কোণের পরিমাণ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইতে থাকিলে উহার ট্যানজেণ্ট ধনাত্মক হইবে এবং 0 হইতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইয়া উহার মান অসীম হইবে। সুতরাং কোণের মান 270°-এর নিকটবর্তী হইলে উহার ট্যানজেণ্ট যদৃচ্ছা বর্ধিত হইবে। পূর্বের ন্যায় বলা হয় tan 270°-এর মান অসীম। OP চতুর্থ পাদে ঘূর্ণায়মান থাকাকালে PM ঋণাত্মক এবং OM ধনাত্মক হইবে। PM-এর সাংখ্যমান ক্রমাগত হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে এবং OM, যতক্ষণ পর্যন্ত OP, OX-এর সহিত মিলিত না হইবে, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে। সুতরাং 270° হইতে কোণের মান 360° পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হওয়া কালে উহার ট্যানজেণ্ট ঋণাত্মক হইবে এবং উহার সাংখ্যমান হ্রাসপ্রাপ্ত হইয়া অসীম হইতে শূন্য হইবে।

অনুরূপভাবে, কোণের পরিবর্তনের সহিত কোট্যানজেণ্টের পরিবর্তন নির্ণয় করা যাইবে।

(iv) কোন কোণের সেকাণ্টের পরিবর্তন

কোণের পরিবর্তনের সহিত উহার সেকাণ্টের পরিবর্তন নির্ণয় করিতে পূর্বের ন্যায় চিত্র হইতে করা যাইতে পারে ; অথবা $\sec POX = \frac{1}{\cos POX}$ সূত্র হইতে

কোসাইনের জ্ঞাত পরিবর্তন হইতে সেকাণ্টের পরিবর্তন নির্ণয় করা যায়। পরবর্তী প্রক্রিয়া অবলম্বনে দেখা যায় যে, কোণের মান 0° হইতে 90°-তে পরিবর্তিত হইলে উহার কোসাইন 1 হইতে 0-তে পরিবর্তিত হয় ; অতএব অনুরূপ কোণের পরিবর্তনে সেকাণ্টের বৃদ্ধি হইবে 1 হইতে অসীম পর্য্যন্ত। অতএব sec 90° হইবে অসীম। কোণের পরিবর্তন 90° হইতে 180° হইলে ঐ কোণের কোসাইনের পরিবর্তন হইবে 0 হইতে -1; অতএব অনুরূপ কারণে সেকাণ্টের সাংখ্য মানের পরিবর্তন হইবে অসীম সংখ্যা হইতে -1 পর্য্যন্ত। কোসাইন এবং সেই কারণে সেকাণ্ট এই পাদে ঋণাত্মক হইবে। কোণটি 180° হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 270° হওয়া পর্য্যন্ত উহার কোসাইন ঋণাত্মক থাকিয়া -1 হইতে 0-তে পরিবর্তিত হইবে। সুতরাং কোণের অনুরূপ পরিবর্তনের জন্য সেকাণ্ট ঋণাত্মক থাকিয়া -1 হইতে অসীম মান পর্য্যন্ত পরিবর্তিত হইবে। কোণের পরিবর্তন 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত হওয়া কালে কোসাইন ধনাত্মক থাকিয়া 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত বর্ধিত হইবে ; অতএব সেকাণ্টও ধনাত্মক থাকিয়া অনুরূপ পরিবর্তনের জন্য অসীম মান হইতে 1 পর্য্যন্ত হ্রাস প্রাপ্ত হইবে।

এই প্রকারেই সাইনের পরিবর্তন হইতে কোসেকাণ্টের পরিবর্তন নির্ণয় করা যায়।

16·2. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ :

বীজগণিতীয় অপেক্ষকের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকও (যেমন, $\sin x$, $\cos x$, ইত্যাদি) লেখ সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। পূর্বের অনুচ্ছেদে উল্লিখিত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের পরিবর্তনগুলি লেখ-এর সাহায্যে দেখা যায়। দুইটি পরস্পরছেদী লম্ব সরলরেখাকে অক্ষরূপে এবং উহাদের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দুরূপে গণ্য করিয়া, x-অক্ষ বরাবর কোণের পরিমাণ এবং y-অক্ষ বরাবর কোণানুপাতের মানগুলি লইয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হয়। এইভাবে, অনেকগুলি বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে যুক্ত করিলে যে-রেখা (বক্র বা সরল) সন্ততঃভাবে (continuously) অথবা বিশেষ ক্ষেত্রে অসন্ততঃ ভাবে পাওয়া যায়, তাহাই উদ্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ হইবে। x এবং y-অক্ষের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান নির্দেশক দিকগুলি সাধারণ।

বীজগণিতীয় সমীকরণের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক সমীকরণও লেখ-এর সাহায্যে সমাধান করা যায় ; বস্তুতঃ বহু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে, লৈখিক পদ্ধতি অপরিহার্য হইয়া পড়ে।

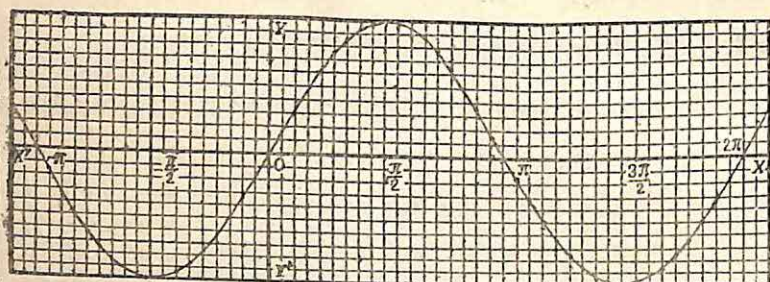
16·3. সাইনের লেখ ঃ

মনে কর, $y = \sin x$.

এখন, স্বাভাবিক সাইনের তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°
y	-1	$-·98$	$-·94$	$-·87$	$-·77$	$-·64$	$-·50$	$-·34$	$-·17$	0

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1	·98	·94	·87	...

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর বা OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গের 10টি বাহুকে

এক একক ধরিয়া $(-90^\circ, -1)$, $(-80^\circ, -·98)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এখন, ঐ বিন্দুগুলিকে সন্তত: বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

টীকা ঃ স্বাভাবিক সাইনের তালিকায় 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত সাইনের মান দেওয়া থাকে। 0° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 90° অপেক্ষা বৃহত্তর কোণগুলির সাইনের মান পাইবার জন্য $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$, ইত্যাদি সূত্রগুলির সাহায্য লওয়া হয়।

সাইনের লেখ-এর বৈশিষ্ট

লেখ হইতে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য লক্ষিত হয় :

(i) লেখটি সন্তত: এবং ঢেউ-এর ন্যায়।

(ii) মূলবিন্দু O এবং যে-সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান π-এর গুণিতক, সেই সমস্ত-বিন্দুতে লেখটি x-অক্ষকে ছেদ করে অর্থাৎ সেখানে $\sin x = 0$.

(iii) $\sin x$-এর মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। সুতরাং $\sin x$-এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান -1 ; যখন x-এর মান 90°-এর অযুগ্ম গুণিতক তখনই $\sin x$-এর মান এইরূপ হইবে।

(iv) $\sin (2n\pi + x) = \sin x$ বলিয়া, $x = 0$ এবং $x = 2\pi$-এর মধ্যবর্তী লেখ-এর অংশ উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বারংবার পুনরাবৃত্তি হইবে।

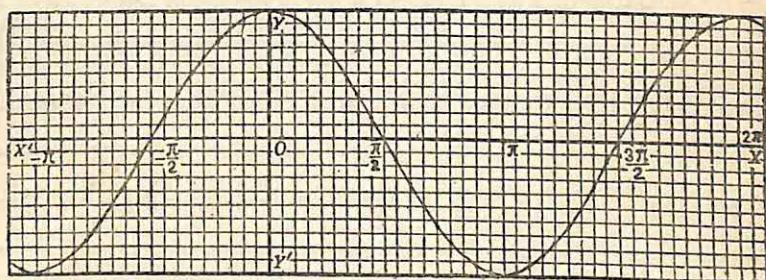
16·4. কোসাইনের লেখ ঃ

মনে কর, $y = \cos x$.

এখন, স্বাভাবিক কোসাইনের তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল ঃ

x	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°
y	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	$-$·17	$-$·34	$-$·5	...

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে

10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর বা OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গের 10টি বাহুকে

এক একক ধরিয়া $(-90°, 0)$, $(-80°, ·17)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এখন ঐ বিন্দুগুলিকে সন্ততঃ বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ (205 পৃষ্ঠায় অঙ্কিত) পাওয়া যাইবে।

কোসাইন লেখ-এর বৈশিষ্ট

(i) কোসাইন ও সাইন লেখকে তুলনা করিলে দেখা যায় যে, সাইন লেখকে সমগ্রভাবে 90° বামদিকে সরাইলে কোসাইন লেখ পাওয়া যায়; কারণ $\sin(90°+x)=\cos x$.

(ii) কোসাইন লেখটি সন্ততঃ এবং প্রতি 360° ব্যবধানে উহার পুনরাবৃত্তি ঘটে।

(iii) $\cos x$-এর মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। সুতরাং $\cos x$-এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান -1; যখন x-এর মান 0°-এর এবং 180°-এর অযুগ্ম গুণিতক তখনই $\cos x$-এর এইরূপ মান হইবে।

(iv) $-90°$ হইতে 90° পর্যন্ত কোসাইনের লেখ y-অক্ষের উভয় পার্শ্বে সমঞ্জস (symmetrical); কারণ $\cos(-x)=\cos x$.

16·5. ট্যানজেণ্টের লেখ :

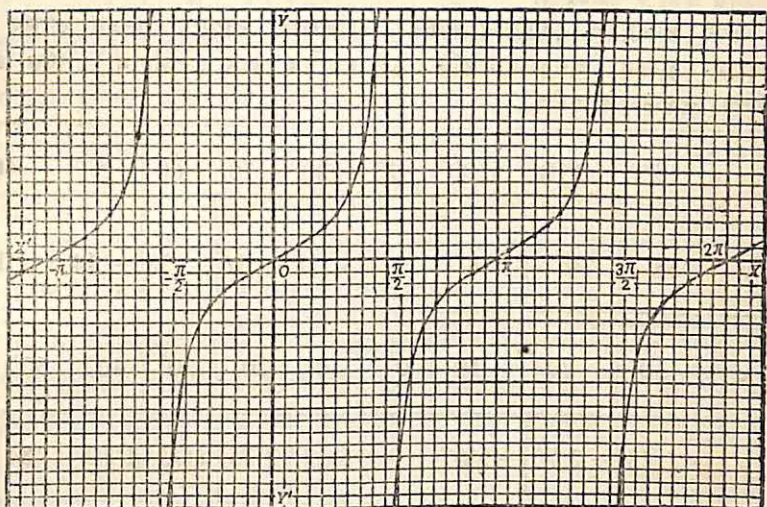
মনে কর, $y=\tan x$.

এখন, স্বাভাবিক ট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°	10°
y	−∞	−5·67	−2·75	−1·73	−1·19	−·84	−·58	−·36	−·18	0	·18

x	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	…
y	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞	−5·67	−2·75	−1·73	…

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর বা OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গের 3টি বাহুকে

এক একক ধরিয়া $(-80^\circ, -5{\cdot}67)$, $(-70^\circ, -2{\cdot}75)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন

কর। এখন ঐ বিন্দুগুলিকে বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ (উপরে অঙ্কিত) পাওয়া যাইবে।

ট্যানজেণ্টের লেখ-এর বৈশিষ্ট

(i) লেখটি সন্ততঃ নয় ; ইহার কয়েকটি ভিন্ন ভিন্ন শাখা আছে। যে-সমস্ত বিন্দুতে ভুজ 90°-এর অযুগ্ম গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে লেখটির অসন্ততি লক্ষিত হয়।

(ii) যে-সমস্ত বিন্দুতে লেখটির অসন্ততি লক্ষিত হয় বামদিক হইতে ডানদিকে যখন x সেই সমস্ত বিন্দু অতিক্রম করে, তখন $\tan x$-এর মান অকস্মাৎ বামদিকের ধনাত্মক মান হইতে ডানদিকের অতিবৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিবর্তিত হয়।

(iii) যে-সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান 90°-এর অযুগ্ম গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাগুলি ক্রমশঃ লেখ-এর সহিত x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে মিলিত হইতে চেষ্টা করে, কিন্তু সম্পূর্ণরূপে কখনও মিলিত হয় না। এই সমস্ত সরলরেখাকে লেখটির অসীম পথ (asymptote) বলে।

(iv) 0° এবং 90°-এর মধ্যবর্তী অংশের লেখ x-অক্ষের উপরে এবং 90° ও 180°-এর মধ্যবর্তী অংশের লেখ x-অক্ষের নীচে অবস্থিত।

$\tan(n\pi + x) = \tan x$ বলিয়া, প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি ঘটিবে।

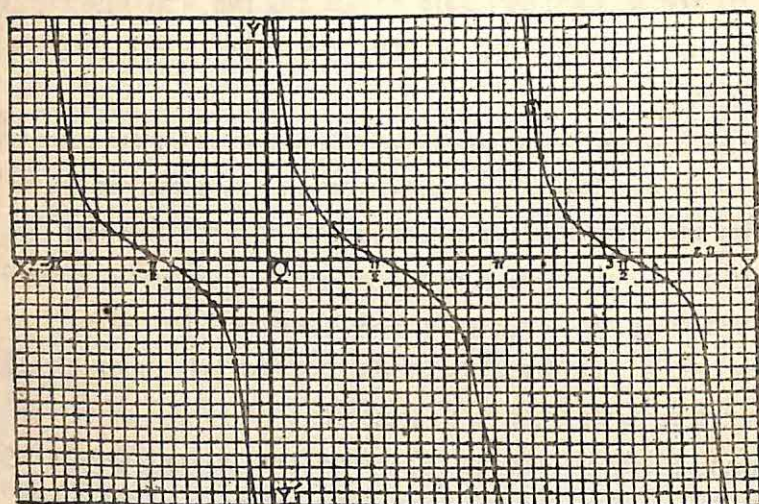
16·6. কোট্যানজেণ্টের লেখঃ

মনে কর, $y = \cot x$.

এখন স্বাভাবিক কোট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপমানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	-120°	-110°	-100°	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°
y	·58	·36	·18	0	$-$·18	$-$·36	$-$·58	$-$·84	$-$1·19

x	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°
y	$-$1·73	$-$2·75	$-$5·67	$-\infty$	5·67	2·75	1·73	1·19	·84

x	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y	·58	·36	·18	0	$-$·18	$-$·36	$-$·58	...

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু

10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের তিনটি বাহুকে একক ধরিরা $(-120^\circ, \cdot58)$, $(-110^\circ, \cdot36)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

কোট্যানজেণ্ট লেখ-এর বৈশিষ্ট

(i) টানজেণ্টের লেখ-এর মত, এই লেখ সন্ততঃ নয়; ইহারও কয়েকটি পৃথক শাখা আছে। $x=0$ বা $n\pi$ হইলে লেখটির অসন্ততি পরিলক্ষিত হয়।

(ii) এই লেখটি ট্যানজেণ্ট লেখ-এর অনুরূপ। ট্যানজেণ্ট লেখটিকে বামদিকে বা ডানদিকে 90° সরাইয়া বসাইলে কোট্যানজেণ্ট লেখ পাওয়া যায়।

(iii) x-অক্ষের যে-সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান 90°-এর যে-কোন যুগ্ম গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাসমূহকে লেখটির অসীম পথ বলে।

(iv) $\cot(n\pi+x)=\cot x$ বলিয়া প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি ঘটিয়া থাকে।

16 7. কোসেকাণ্টের লেখঃ

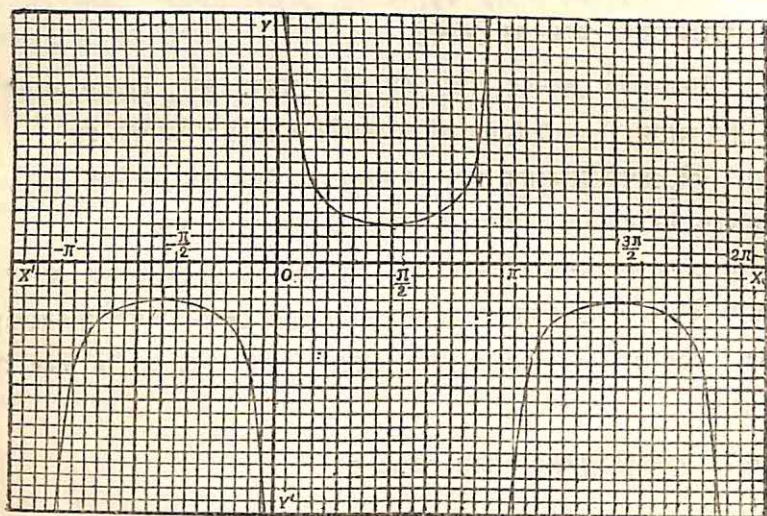
মনে কর, $y=\operatorname{cosec} x$.

এখন স্বাভাবিক কোসেকাণ্টের তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°
y	-1	$-1\cdot02$	$-1\cdot06$	$-1\cdot15$	$-1\cdot29$	$-1\cdot56$	-2	$-2\cdot92$	$-5\cdot76$

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y	∞	$5\cdot76$	$2\cdot92$	2	$1\cdot56$	$1\cdot29$	$1\cdot15$	$1\cdot06$	$1\cdot02$	1	$1\cdot02$	$1\cdot06$	$1\cdot15$	...

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর বা OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গের তিনটি বাহুকে এক একক ধরিয়া $(-90^\circ, -1)$, $(-80^\circ, -1\cdot02)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

এখন ঐ বিন্দুগুলিকে বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে। $x=-\pi$ এবং $x=2\pi$ পর্যন্ত লেখ অঙ্কিত হইয়াছে।

কোসেকাণ্টের লেখ-এর বৈশিষ্ট

(i) এই লেখটিও সন্তত: নহে; ইহারও কতকগুলি বিচ্ছিন্ন শাখা আছে; $x=0$ এবং π-এর যে-কোন গুণিতক হইলে লেখটির অসন্ততি পরিলক্ষিত হয়।

(ii) লেখটির কোন অংশ $y=1$ এবং $y=-1$-এর মধ্যবর্তী হইবে না। কারণ, y-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(iii) $\operatorname{cosec}(2\pi+x)=\operatorname{cosec} x$ বলিয়া, প্রত্যেক 360° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি ঘটিবে।

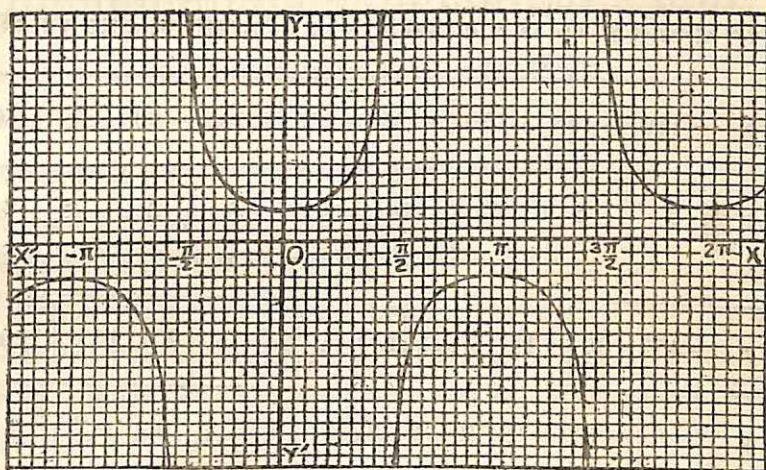
16·8. সেকাণ্টের লেখ:

মনে কর, $y=\sec x$.

এখন, স্বাভাবিক সেকাণ্ট তালিকার সাহায্যে অথবা $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ সূত্রের সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া পরের পৃষ্ঠায় তালিকা প্রস্তুত করা হইল:

x	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°
y	∞	$-5{\cdot}88$	$-2{\cdot}94$	-2	$-1{\cdot}56$	$-1{\cdot}29$	$-1{\cdot}15$	$-1{\cdot}06$	$-1{\cdot}01$	1

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y	$1{\cdot}01$	$1{\cdot}06$	$1{\cdot}15$	$1{\cdot}29$	$1{\cdot}56$	2	$2{\cdot}94$	$5{\cdot}88$	∞	$-5{\cdot}88$	$-2{\cdot}94$	-2	...

x-অক্ষ বরাবর বা OX-এর দিকে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর বা OY-এর দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গের তিনটি বাহুকে

এক একক ধরিয়া $(-80^\circ, -5{\cdot}88)$, $(-70^\circ, -2{\cdot}94)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

সেকাণ্ট লেখ-এর বৈশিষ্ট

(i) এই লেখটিও সন্ততঃ নহে, ইহার কতকগুলি বিচ্ছিন্ন শাখা আছে। 90°-এর প্রত্যেক অযুগ্ম গুণিতকে লেখটির অসন্ততি পরিলক্ষিত হয়।

(ii) x-অক্ষের যে-সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান 90°-এর অযুগ্ম গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাসমূহকে লেখটির অসীম পথ বলে।

(iii) কোসেকাণ্ট লেখকে 90° বামদিকে সরাইয়া বসাইলে সেকাণ্ট লেখ পাওয়া যাইবে।

(iv) $\sec(2\pi+x)=\sec x$ বলিয়া, প্রত্যেক 360° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি ঘটিবে।

x-এর সমস্ত মানে, $\sec(-x)=\sec x$; অতএব সেকাণ্ট লেখ y-অক্ষের প্রতিসম।

16·9. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$ সীমার মধ্যে $\sin 2x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে $\sin 150°$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

মনে কর, $y=\sin 2x$.

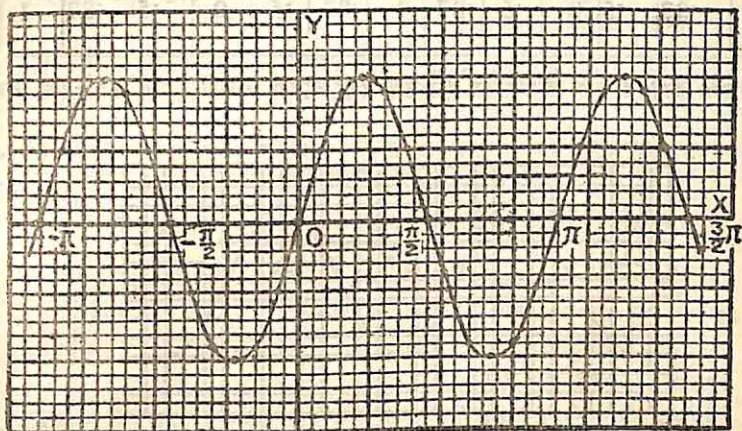
এখন, স্বাভাবিক সাইন তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 15° ব্যবধানে y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	−180°	−165°	−150°	−135°	−120°	−105°	−90°	−75°	−60°
y	0	·5	·87	1	·87	·5	0	−·5	−·87

x	−45°	−30°	−15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
y	−1	−·87	−·5	0	·5	·87	1	·87	·5	0	−·5	−·87

x	135°	150°	165°	180°
y	−1	−·87	−·5	0

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10°-এর সমান এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10টি বাহুকে এক একক ধরিয়া

$(-180^\circ, 0)$, $(-165^\circ, \cdot 5)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। গুলিকে সন্তত: বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

এখন লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, যখন $x=75^\circ$, তখন $y=\cdot 5$

অর্থাৎ $\sin 2.75^\circ = \sin 150^\circ = \cdot 5.$

উদাহরণ 2. x-এর মান $-\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$-এর মধ্যে রাখিয়া,

$2 \sin^2 x = \cos 2x$ সমীকরণটির লৈখিক সমাধান কর।

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে $1 - \cos 2x = \cos 2x$

অথবা, $2 \cos 2x = 1$ অর্থাৎ $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

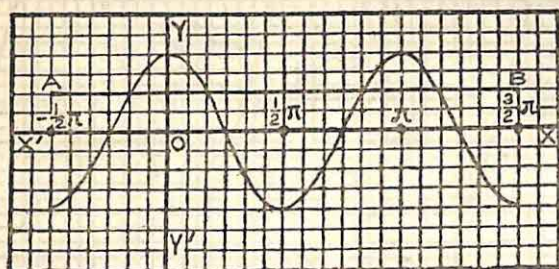
ইহাকে '$y = \cos 2x$, যেখানে $y = \frac{1}{2}$' ধরা হয়;

অর্থাৎ $y = \cos\ 2x$ এবং $y = \frac{1}{2}$-এর লেখদ্বয়ের (একই এককে অঙ্কিত) ছেদবিন্দুগুলির x-স্থানাঙ্কসমূহ নির্ণেয় বীজ হইবে।

এখন, স্বাভাবিক কোসাইন তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 15° ব্যবধানে $y = \cos\ 2x$-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান (শুদ্ধমান) পর্যন্ত লইয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
y	-1	$-\cdot 87$	$-\cdot 5$	0	$\cdot 5$	$\cdot 87$	1	$8\ 7$	$\cdot 5$	0	$-\cdot 5$	$-\cdot 87$	-1

x	105°	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°
y	−·87	−·5	0	·5	·87	1	·87	·5	0	−·5	−·87	−1

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু 15°-এর সমান

এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 4টি বাহুকে এক একক ধরিয়া $(-90°, -1)$, $(-75°, -·87)$, ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ঐ বিন্দুগুলিকে সন্ততঃ বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে $y=\cos 2x$-এর লেখ পাওয়া যাইবে $(-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi)$ ।

একই এককে $y=\frac{1}{2}$ সরলরেখার লেখ (AB) অঙ্কন কর।

লেখ হইতে দেখা যায় যে, লেখদ্বয় পরস্পরকে চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহাদের x-স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $-30°, 30°, 150°$ ও $210°$ অর্থাৎ $-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$.

ইহারাই নির্ণেয় বীজ বা সমাধান।

প্রশ্নমালা XII

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কন কর:

(i) $\sin 2x, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$. (ii) $\cos 2x, (-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi)$.

(iii) $\tan 2x, (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. (iv) $\sin x + \cos x, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

2. (*a*) $x=-\pi$ এবং $x=\pi$ সীমার মধ্যে $\sin x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $\sin 120°$ এবং $\sin 150°$-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

ঐ লেখ হইতে যে-কোণটির সাইন ·7 তাহার আসন্ন মান নির্ণয় কর।

(*b*) $x=0°$ এবং $x=360°$ সীমার মধ্যে $\sin x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $\sin 240°$-এর মান নির্ণয় কর।

3. (*a*) $x=-\pi$ এবং $x=\pi$ সীমার মধ্যে $\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $\cos 120^\circ$ এবং $\cos 150^\circ$-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

(*b*) $x=0^\circ$ এবং $x=360^\circ$ সীমার মধ্যে $\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $\cos 240^\circ$ এবং $\cos 300^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

[W. B. B. H. S.]

4. $x=0^\circ$ এবং $x=360^\circ$ সীমার মধ্যে $\cos 2x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $\cos 120^\circ$-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

5. $x=0$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত $y=\sin x+\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর।

প্রদত্ত

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

[W. B. B. H. S.]

6. $x=-30$ এবং $x=60$ সীমার মধ্যে $y=2\sin x^\circ+\cos x^\circ$-এর লেখ অঙ্কন কর।

প্রদত্ত

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$\cos x$	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17

[W. B. B. H. S.]

7. $x=0$ এবং $x=\pi$ সীমার মধ্যে $y=\sin x$ এবং $y=\cos x$-এর লেখদ্বয় অঙ্কন কর। লেখদ্বয় যে-বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুটি নির্ণয় কর।

8. $x=-\pi$ এবং $x=\pi$ সীমার মধ্যে $(\sin x-\cos x)$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং উহা হইতে x-এর যে-মানের জন্য $\tan x=1$ হয়, সেই মান নির্ণয় কর।

9. $3\sin x+4\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং ঐ লেখ হইতে ইহার বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

10. (i) $x=0$ এবং $x=\frac{1}{2}\pi$ সীমার মধ্যে লেখ সাহায্যে $\tan x=1$-এর সমাধান কর।

(ii) $x=0$ এবং $x=\frac{1}{2}\pi$ সীমার মধ্যে $\tan x=2x$ সমীকরণটির লৈখিক সমাধান কর। [B. U. Ent.]

11. $x=0$ এবং $x=2\pi$ সীমার মধ্যে $\sin 2x=\sin x$ সমীকরণটির লৈখিক সমাধান কর।

12. $y=2x-1$ এবং $y=\cos 2x$-এর লেখদ্বয় অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $x=\cos^2 x$-সমীকরণটির সমাধান কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা I

1. (a) $175°49'1''\cdot776$. (b) $105°$.
2. (a) $70^g42'$. (b) $83^g33'33\cdot3''$.
3. (a) $\frac{3407\pi}{13500}$. (b) $1\cdot0179365\pi$.
5. $\frac{5\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$. 6. $\left(\frac{90}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^\circ, \left(\frac{90}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^\circ$.
7. $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{10}$. 8. 30. 9. $56\frac{16}{19}$ ডিগ্রী, $60°$, $63\frac{3}{19}$ ডিগ্রী।
10. $7°12'$, $86°24'$, $86°24'$; 8^g, 96^g, 96^g. 11. $63°$.
12. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$. 13. $96°$. 14. $\frac{\pi}{10}$. 15. $\frac{4\pi}{5}$.
16. $\frac{(n-2)\pi}{n}$. 19. $\frac{7\pi}{12}$. 20. 1 টা 36 মিনিটে।
21. 14 মিটার। 22. 48 সে.মি.। 23. 198 সে. মি.।
24. 428360 মাইল (আসন্ন)। 25. (i) 4 : 5. (ii) $\frac{1}{36}\pi$.

প্রশ্নমালা II

13. (i) 1. (ii) 1. (iii) 1. (iv) 2 cot A. (v) 2. (vi) 1.
14. (i) $(\sec^2\theta+\tan^2\theta)^2$. (ii) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.
21. (i) $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \frac{1}{\cos\alpha}, \sqrt{1+\tan^2\alpha}$,

$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}, \frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$. (ii) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$.

22. (i) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. (ii) $-\frac{56}{33}$.
23. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (ii) $\frac{4}{5}$. (iii) $\frac{a^2-b^2}{2ab}, \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.
24. (i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. (ii) $xy=c^2$. (iii) $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.
(iv) $q(p^2-1)=2$. (v) $v(u^2-1)=2u$.
(vi) $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$.

প্রশ্নমালা III

13. 1. **14.** 1. **15.** $\frac{5}{4}$. **16.** 2. **17.** $9\frac{2}{3}$. **18.** 30°.
19. 45°. **20.** 30°. **21.** 60°. **22.** (*i*) $45^\circ, 90^\circ, 45^\circ$. **23.** 30°.

প্রশ্নমালা IV

1. (*i*) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (*ii*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (*iii*) $-\sqrt{3}$. (*iv*) $-\sqrt{2}$.
(*v*) $\sqrt{2}$. (*vi*) $\sqrt{3}$.

2. (*i*) $-\cos 30^\circ$. (*ii*) $\sin 30^\circ$. (*iii*) $\tan \frac{\pi}{4}$.

3. (*i*) $\cos 8^\circ$. (*ii*) $\cos \frac{\pi}{9}$. (*iii*) $\cot 40^\circ$.
(*iv*) $-\sec 20^\circ$. (*v*) $-\sec 20^\circ$.

4. (*i*) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (*ii*) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (*iii*) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

5. (*i*) $\sqrt{3}$. (*ii*) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** 0. **7.** (*i*) $-\frac{1}{2}$. (*ii*) 1.

8. 1. **9.** $-\cos x$. **10.** 1. **17** (*i*) 60°. (*ii*) 30°.
18. (*i*) $30^\circ, 150^\circ, -210^\circ, -330^\circ$.
(*ii*) $120^\circ, 300^\circ, -60^\circ, -240^\circ$. (*iii*) $135^\circ, 225^\circ$.
19. (*i*) $150^\circ, 210^\circ$. (*ii*) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.
(*iii*) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$. (*iv*) $120^\circ, 240^\circ$.
(*v*) $30^\circ, 150^\circ$. (*vi*) $60^\circ, 300^\circ$.
(*vii*) $30^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 240^\circ$. (*viii*) $30^\circ, 150^\circ$.
20. (*i*) $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{12}$. (*ii*) $-\frac{3}{4}$. (*iii*) $\pm\sqrt{3}$.
21. (*i*) $\frac{1}{10}$. (*ii*) $\frac{51}{26}$.
22. (*i*) 0 অথবা $\sin\theta$ ($n=$ যুগ্ম অথবা অযুগ্ম হইলে);
(*ii*) 0 অথবা $\cos x$ ($n=$ যুগ্ম অথবা অযুগ্ম হইলে)।

প্রশ্নমালা V

1. (*i*) $-(2+\sqrt{3}),\ \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.
(*ii*) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ -(2+\sqrt{3})$.

2. (*i*) $\frac{77}{85}, -\frac{13}{84}$. (*ii*) $\frac{171}{221}, \frac{21}{220}$.

22. (i) $\sin A \cos B \cos C - \cos A \sin B \cos C$
$+ \cos A \cos B \sin C + \sin A \sin B \sin C$;
$\cos A \cos B \cos C + \cos A \sin B \sin C$
$+ \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$;

$$\frac{\tan A - \tan B - \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B}.$$

(*ii*) $$\frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1}.$$

প্রশ্নমালা VI

1. (*i*) $\sin 5\theta + \sin \theta$. (*ii*) $\frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 9\alpha$.
(*iii*) $\frac{1}{4} \sin 12\beta - \frac{1}{4} \sin 2\beta$.

2. (i) $2 \sin 2\theta \sin \theta$. (*ii*) $\sin 90^\circ \cos 15^\circ$.
(*iii*) $2 \cos A \cos B$.

23. $\sin (A+B+C) + \sin (A-B-C) + \sin (A+B-C)$
$+ \sin (A-B+C)$.

24. $4 \sin (B+C) \sin (C+A) \sin (A+B)$.

প্রশ্নমালা VII

1. $\frac{120}{169}, -1\frac{50}{119}, -1\frac{1}{119}$. **2.** $-\frac{44}{125}, 1\frac{8}{117}, -2\frac{29}{44}$.

3. $1\frac{4}{13}$. **4.** $\frac{(a^2+b^2)(a^3-ab^2+2b^3)}{2b(a^2-b^2)}$.

7. $1 - 8 \sin^2 \theta + 8 \sin^4 \theta$.

প্রশ্নমালা VIII

21. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **22.** 2. **23.** $\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

24. $2 \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$.

প্রশ্নমালা X

1. $n\pi \pm \frac{1}{4}\pi$. **2.** (*i*) $n\pi \pm \frac{1}{4}\pi$. (*ii*) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

3. (*i*) $n\pi + \frac{1}{4}\pi$ অথবা, $n\pi + (-1)^n \frac{1}{6}\pi$. (*ii*) $n\pi + \frac{1}{4}\pi$.

4. $\frac{r\pi}{m+(-1)^r n}$. **5.** (*i*) $\frac{1}{4}n\pi, \frac{1}{24}(2n+1)\pi$. (*ii*) $\frac{2n+1}{a+b} \cdot \frac{\pi}{2}$.

6. (*i*) $\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi$; $2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$.
(*ii*) $\frac{1}{2}(2n+1)\pi$, বা, $\frac{1}{4}(2n+1)\pi$, বা, $\frac{1}{8}(2n+1)\pi$.

7. (*i*) $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi$. (*ii*) $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi$.
8. (*i*) $2n\pi \pm \frac{1}{3}\pi, (2k+1)\pi$. (*ii*) $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$. (*iii*) $2n\pi$.
9. $\frac{1}{2}n\pi + (-1)^n \frac{1}{12}\pi$, বা, $n\pi + \frac{1}{12}\pi, n\pi + \frac{5}{12}\pi$. **10.** $2n\pi + \frac{1}{2}\pi$.
11. $\frac{1}{2}(n\pi + \alpha)$, যেখানে $\tan \alpha = 2$.
12. $n\pi - \frac{1}{4}\pi$, বা, $\frac{1}{2}n\pi + (-1)^n . \frac{1}{2}\alpha$, যেখানে $\sin \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.
13. $n\pi + \frac{1}{6}\pi$. **14.** $n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$. **15.** $\frac{1}{12}(4n+1)\pi, [n \neq 3m+2]$.
16. $\frac{1}{6}n\pi$.
17. $2n\pi + \alpha \pm \beta$, যেখানে $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
18. $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$ বা, $2n\pi$. **19.** $15^\circ, 105^\circ$.
20. $2n\pi + \frac{1}{12}\pi, 2n\pi - \frac{7}{12}\pi$. **21.** $\pm\frac{1}{4}\pi, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{4}\pi$.
22. $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$. **23.** $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$. **24.** $\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$.
25. $\frac{1}{4}(2n+1)\pi$, বা, $n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$.
26. $2n\pi + \frac{1}{2}\pi$, বা, $2n\pi - \alpha$, যেখানে $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
27. $2n\pi + \frac{1}{2}\pi$ বা, $n \times 360^\circ + 12^\circ 42'$. **28.** $x = \frac{1}{4}\pi, y = \frac{1}{4}\pi$.

প্রশ্নমালা XI

28. $y = \frac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$. **29.** $(a-b)(1+bc) = (b-c)(1+ab)$.
30. (*i*) 1. (*ii*) 0. (*iii*) $\frac{3}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.
31. (*i*) $\pm\sqrt{2}$. (*ii*) $\frac{p-q}{1+pq}$. (*iii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. (*iv*) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.
(*v*) 2. (*vi*) $0, \frac{1}{2}$. (*vii*) $0, \pm\frac{1}{2}$. (*viii*) $0, \pm 1$. (*ix*) 13.
32. $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

প্রশ্নমালা XII

1. (*i*) 1·0791813. (*ii*) 1·6532126. (*iii*) 1·8750613.
(*iv*) ·7043652. (*v*) $\bar{1}$·2730013. (*vi*) $\bar{2}$·1760913.
(*vii*) $\bar{3}$·7323939. (*viii*) $\bar{1}$·9345759. (*ix*) $\bar{6}$·2007583.
(*x*) 3·3922159.
2. (*i*) 3·631. (*ii*) 4·227.3. (*i*) 0. (*ii*) 2. (*iii*) −1. (*iv*) −2. (*v*) −3.
4. (*i*) 0·69897. (*ii*) 1·27875. (*iii*) 2·17319. (*iv*) 3·5874.
(*v*) $\bar{1}$·36922. (*vi*) $\bar{2}$·0086. (*vii*) $\bar{3}$·91328. (*viii*) $\bar{6}$·36173.
5. (*i*) 1·0247. (*ii*) 1·5733. (*iii*) 221·62. (*iv*) 70194.
(*v*) 0·23174. (*vi*) 0·029376. (*vii*) 0·41029. (*viii*) 0·0019588.
6. (*i*) 6. (*ii*) 13. **7.** 3টি। **8.** অষ্টম অঙ্ক।
10. 2·8019132 ; ·6337436. **11.** 191·5631. **12.** ·06974.

13. 18·24. **14.** 2·302. **15.** 1·4777. **16.** 2·93.
17. 259·569. **18.** (*i*) ·5988. (*ii*) 2·545. (*iii*) 9·0762. (*iv*) 1·3304.
20. 10·5675. **21.** (*i*) 1·593. (*ii*) 1·206. (*iii*) 1·77. (*iv*) ·029.
22. (*i*) $x=2·71$, $y=1·71$. (*ii*) $x=·41$, $y=5·66$.
23. (*i*) ·61038. (*ii*) ·66284. (*iii*) ·39895. (*iv*) ·7283.
(*v*) 1·42168. (*vi*) 1·08253. (*vii*) $\bar{1}$·79304. (*viii*) 9·87401.
(*ix*) 9·85166. (*x*) 9·89619. (*xi*) 10·54626. (*xii*) 10·17802.
24. (*i*) ·81459. (*ii*) ·5256366. (*iii*) 9·7867315.
(*iv*) 65°28′37″. (*v*) 56°25′34″. **25.** (*i*) 36°53′46″. (*ii*) ·2394.

প্রশ্নমালা XIII (A)

21. $A=90°$, $B=30°$, $C=60°$.
27. 10 সে. মি., $10\sqrt{2}$ সে. মি., $5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ সে. মি.।
28. 84 বর্গ সে. মি.।

প্রশ্নমালা XIII (B)

17. $r=4$ সে. মি., $R=8\frac{1}{8}$ সে. মি.।
19. 8 সে. মি., 15 সে. মি., 17 সে. মি.।

প্রশ্নমালা XIV (A)

1. 60°, 45°, 75°. **2.** 38°11′, 60°, 81°49′. **3.** 120°.
4. 104°28′39·04″. **5.** (*a*) 77°19′10·6″. **6.** 37°48′39·4″.
8. 58°59′33·74″. **9.** 55°46′16·4″ (প্রায়)। **10.** 9·6733937.
12. $2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3}+1)$. **13.** $\sqrt{(10-2\sqrt{5})} : 4 : (\sqrt{5}+1)$.
14. $\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$. **15.** 14·35948 সে. মি.।
16. ·82 মি., ·71 মি., ·47 মি.।

প্রশ্নমালা XIV (B)

1. $A=30°$, $B=90°$, $c=2\sqrt{3}$ সে. মি.। **2.** 117°38′45″.
3. 70°53′36″, 49°6′24″. **5.** 69°49′35·2″, 50°10′24·8″.
6. অবশিষ্ট বাহু $=8\sqrt{7}$ মিটার এবং অবশিষ্ট কোণদ্বয় 79°6′24″, 40°53′36″.
8. $B=97°13′$, $C=35°29′$. **9.** 103°22′, 40°26′.
10. $A=94°42′54″$, $B=25°17′6″$. **11.** 79°6′24″, 60°, 40°53′36″.
12. 75°10′42″, 82°24′39″, 22°24′39″.
13. $C=105°$, $a=\sqrt{2}$ সে. মি., $c=(\sqrt{3}+1)$ সে. মি.।
14. $b=95·59$ মি., $c=89·64$ মি. এবং $A=65°15′$. **16.** 79·063.

প্রশ্নমালা XIV (C)

1. কোন সমাধান নাই।

4. $A=90^\circ, C=30^\circ, a=2.$ **5.** 60°, বা, 120°.

6. $A=60^\circ, C=75^\circ, a=\sqrt{6}$ অথবা, $A=30^\circ, C=105^\circ, a=\sqrt{2}$.

7. $B=51^\circ\ 27'\ 1{\cdot}56'', C=57^\circ\ 17'\ 20{\cdot}44''$.

8. $53^\circ\ 11'\ 30''$ বা, $126^\circ\ 48'\ 30''$.

9. $A=33^\circ\ 39'\ 34'', B=86^\circ\ 20'\ 26''$.

10. $B=54^\circ\ 32'\ 53'', C=90^\circ\ 3'\ 7''$
অথবা, $B=125^\circ\ 27'\ 7'', C=19^\circ\ 8'\ 53''$.

11. $A_1=87^\circ\ 48'\ 4'', \quad C_1=58^\circ\ 56'\ 56''$;
$A_2=25^\circ\ 41'\ 56'', C_2=121^\circ\ 3'\ 4''$.

প্রশ্নমালা XV

1. $57{\cdot}7$ মিটার (প্রায়)। **2.** $346{\cdot}4$ মিটার (প্রায়)।

3. 14 মিটার। **4.** $5\sqrt{3}$ মিটার। **5.** 70 মিটার।

6. $6\sqrt{3}$ মিটার। **7.** 60°. **8.** 45°. **9.** 30°.

10. $50\sqrt{3}$ মিটার।

12. (*a*) $62(3+\sqrt{3})$ মিটার। (*b*) $54(\sqrt{3}-1)$ মিটার।

13. নদীর বিস্তার 30 মিটার ; দুর্গের উচ্চতা $30\sqrt{3}$ মিটার।

14. 30°. **15.** $13(2+\sqrt{3})$ মিটার।

16. ভূমি হইতে 5 মিটার উপরে।

17. $60\sqrt{3}$ ফুট, $30\sqrt{3}$ ফুট, বড় স্তম্ভ হইতে 60 ফুট দূরে।

18. $500(3-\sqrt{3})$ মিটার। **19.** $8(3-\sqrt{3})$ মিটার।

20. 150 মিটার। **21.** $16(\sqrt{3}-1)$ গজ।

22. $23(\sqrt{3}+1)$ মিটার। **23.** $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$ মাইল।

24. $1{\cdot}366$ কিলোমিটার (প্রায়)। **25.** 14400 ফুট।

26. 10,000 ফুট। **27.** (*a*) $1{\cdot}366$ কিলোমিটার।

28. (*a*) $1\frac{1}{2}$ মিনিট। (*b*) ঘণ্টায় $16\sqrt{3}$ কিলোমিটার।

30. (*a*) $d \sin\alpha \cos(\alpha+\beta) \sec(\beta+2\alpha)$ মিটার ;
$d \sin\beta \sec(\beta+2\alpha)$ মিটার।

প্রশ্নমালা XVI

2. (*a*) $\cdot87, \cdot5$; $45^\circ, 135^\circ$. (*b*) $-\cdot87$.

3. (*a*) $-\cdot5, -\cdot87$. (*b*) $-\cdot5, \cdot5$. **4.** $-\cdot5$.

7. $\frac{1}{4}\pi$. **8.** $-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$. **9.** 5.

10. (*i*) $\frac{1}{4}\pi$. (*ii*) $66^\circ\ 40'$ (প্রায়)।

11. $x=0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ$.

12. $x=36^\circ 40'$ (প্রায়) বা $\cdot64$ রেডিয়ান (প্রায়)।

TABLE 1

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	60072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	42	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

TABLE III

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	53	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																

NATURAL COSINES

TABLE IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11718	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

NATURAL TANGENTS

65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°									
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4816	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.

The cotangent of a small angle of x' or the tangent of $90° - x'$ is very nearly equal to 3437·7 divided by x.

NATURAL COTANGENTS

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of x minutes $\log \sin x'$ or $\log \cos (90° - x') = \log x + \bar{4}·46373$.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	23	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81403	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	3	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	−∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.

For small angles of x minutes log tan x' or log cot $(90° - x')$
$= \log x + \bar{4}{\cdot}46373.$

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76118	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.								
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																

LOGARITHMIC COTANGENTS

গ্রন্থকারদ্বয়ের উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণীর অন্যান্য পুস্তক :

- বীজগণিত
- স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
- ক্যাল্‌কুলাস্‌
- বলবিদ্যা

Higher Secondary Mathematics

- Algebra
- Trigonometry
- Co-ordinate Geometry
- Calculus
- Mechanics

Keys to all these books are also available.